Géométrie des variétés de Fano : sous-faisceaux du fibré tangent et diviseur fondamental

à Nice

Objet : variété projective lisse $X/\mathbb{C}$ dont le fibré tangent T_X est «positif».

I] Amplitude de fibrés vectoriels

1) Soit $L \to X$ un fibré en droites. $s_0, \dots, s_N \in H^0(X, L)$ une base

$$\Phi_{|L|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^N$$
$$x \longmapsto [s_0(x) : \cdots : s_N(x)]$$

· L est ample si $\exists\, m \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que $\Phi_{|mL|}$ soit un plongement.

2) Soit $E \xrightarrow{\pi} X$ un fibré vectoriel de rang $r \geq 2$. $E_x := \pi^{-1}(x) \cong \mathbb{C}^r$

$\mathbb{P}(E) \xrightarrow{\hat{\pi}} X$ le fibré projectif associé. $\hat{\pi}^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{r-1}$. $x \in X$.

$$\hat{\pi}^{-1}(x) = \{\text{hyperplanes de } E_x\} = \{\text{droites de } E_x^*\}.$$

$$\hat{\pi}^* E^* \supseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1) = \{(x, [\ell], v) \mid v \in \ell \subset E_x^*\}$$

$\downarrow$

$\mathbb{P}(E)$

un fibré en droites.

· E est ample si $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ est ample.

Théorème (Mori, 1979)

> Soit X une variété projective lisse de dimension n.
> $X \cong \mathbb{P}^n$ si et seulement si T_X est ample.

Question 1

> Soit $E \to X$ un fibré vectoriel ample. Si $\exists\, \sigma : E \to T_X$ non nul, alors X ?

Théorème (L, 2017)

> Soit $E \to X$ un fibré vectoriel ample. Si $\exists\, \sigma : E \to T_X$ non nul, alors $X \cong \mathbb{P}^n$, où $n = \dim(X)$.

· La notion d'amplitude ici est trop forte, la géométrie de X n'est pas très riche.

II Positivité de $c_1(X)$

- $c_1(X) := c_1(T_X) = c_1(\det T_X) > 0$, i.e. $\det T_X$ est ample.
- $E \to X$ un fibré vectoriel ample, alors $\det E$ est ample.
- $K_X = \det(\Omega_X^1)$: diviseur canonique $\quad -K_X = \det(T_X)$: diviseur anticanonique
- X est une variété de Fano si $-K_X$ est ample.

Exemples

1) $X \cong \mathbb{P}^n$. $\qquad$ 2) $Y \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)|$ $\quad d \leq n$.

3) X homogène et $b_1(X) = 0$

Question 2

Classification des variétés de Fano X ?

Définition

Soit X une variété de Fano lisse. L'indice de X est

$$r_X := \sup \left\{ i \in \mathbb{Z}_{>0} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \ H \text{ Cartier ample tel que} \\ -K_X = iH \end{array} \right\}$$

- L'indice r_X est X est plus grand, la géométrie de X est plus simple.

  1) $r_X \leq n+1$ avec égalité ssi $X \cong \mathbb{P}^n$

  2) $r_X = n$ ssi $X \cong Q^n \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$

  (Kobayashi – Ochiai)

  3) $r_X = n-1$ et $n-2$, classification.

  (Iskovskikh, Fujita, Mori, Mukai, Wiśniewski, ...)

Remarque

$\exists$ H à équivalence linéaire près tel que $-K_X = r_X H$. On dit que H est le diviseur fondamental de X.

- La classification de X est possible grâce au l'existence d'une suite de sous-variétés lisses décroissantes de X. La question se réduit à la classification de certains surfaces.

Théorème (Shokorov, Fujita, Mella, ...)

X Fano et lisse de dim n. Si $r_X \geq n-2$, alors $\exists$ $X_1 \in |H|$ lisse

1) $K_{X_1} = (r_X - 1) H|_{X_1}$. $\rightsquigarrow$ Si $\dim(X_1) \geq 3$. on pourra continuer.
2) $h^0(X_1, H|_{X_1}) = h^0(X, H) - 1$.

• Ceci n'est plus vrai si $r_X = n-3$.

Exemple (Höring – Voisin, 2011)

$S \longrightarrow \mathbb{P}^2$: l'éclatement de $\mathbb{P}^2$ dans $\cancel{p_1}, \cdots, \cancel{p_8}$ en position générale.
Alors $-K_S$ est ample et $Bs|-K_S| = \{P\}$. Posons $X = S \times S$
$P_i : X \longrightarrow S$ $(i = 1, 2)$ $S_i = P_i^{-1}(P)$. Alors $Bs|-K_X| = S_1 \cup S_2$.
Soit $Y \in |-K_X|$ un élément générale. alors $S_1 \cup S_2 \subset Y$.
Si Y est lisse. alors $\dim(S_1 \cap S_2) \geq 1$, mais on a $S_1 \cap S_2 = (p, p)$.
Contradiction.

• La singularié de Y n'est pas "trop singulière".

Définition.

Soit X une variété projective normale. X est à singulari~~tés~~s canoniques si
1) K_X est $\mathbb{Q}$ - Cartier,
2) Pour $\forall$ $\hat{X} \xrightarrow{\pi} X$ une résolution, $\exists$ $E \geq 0$ π-exceptionnel
tel que $K_{\hat{X}} = \pi^* K_X + E$.

Théorème (Floris, 2013)

Soit X une variété projective de dimension n. à singularités canonique.
Supposons que $\exists$ H Cartier et ample tel que $-K_X = (n-3) H$. Si $n \geq 4$
et $h^0(X, H) > 0$. alors $\exists$ $X_1 \in |H|$ à singularités canoniques.

• Si X est une variété de Fano lisse, et H est son diviseur fondamental, tel que $h^0(X, H) \geq n-2$, et $r_X = n-3$, alors $\exists$ $X_1 \in |H|$ à sing. canonique. et $h^0(X_1, H|_{X_1}) \geq (n-2) - 1 = n-3$.
• Si $\dim(X_1) = n-1 \geq 4$. on a $h^0(X_1, H|_{X_1}) > 0$ et $-K_{X_1} = ((n-1)-3) H|_{X_1}$
On pourra continuer.
• $X = X_0 \supseteq X_1 \supseteq \cdots \supseteq X_{n-3}$.
$X_{i+1} \in |H|_{X_i}|$. et X_i est à singulari~~tés~~s canoniques.
$K_{X_{n-3}} = 0$.

• L'étude de X se réduit à l'étude de $(X_{n-3}, H|_{X_{n-3}})$

Formule de Riemann-Roch

$$h^0(X,H) = \chi(X,H) = \frac{-n^2+7n-8}{24} H^n + \frac{c_2(X)\cdot H^{n-2}}{12} + n-3 \qquad H^n > 0$$

Question 3

$c_2(X)\cdot H^{n-2}$?

III Positivité de $c_2(X)$

Théorème (Peternell, 2008)

Soit X une variété projective lisse de dimension n, A un diviseur ample. Si $-K_X$ est semi-ample (i.e. $\exists\, m \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que $Bs|-mK_X| = \emptyset$) alors $c_2(X)\cdot A^{n-2} \geq 0$.

1) Si $n = 4$ ou 5, $c_2(X)\cdot H^{n-2} \geq 0 \Rightarrow h^0(X,H) > n-3$.

2) Si $n \geq 6$ et $\rho(X) \geq 2$, classification (Wiśniewski) $\Rightarrow h^0(X,H) \geq n-2$.

• L'inégalité de Bogomolov si T_X est H-semistable.

(X, A) une paire polarisée: X une variété projective lisse de dimension n, A un fibré en droites ample.

$\mathcal{E}$ un faisceau cohérent au-dessus de (X, A) sans-torsion. La pente de $\mathcal{E}$ par rapport à A est

$$\mu_A(\mathcal{E}) := \frac{c_1(\mathcal{E})\cdot A^{n-1}}{rg(\mathcal{E})}.$$

Définition

Soit $E \to (X,A)$ un fibré vectoriel de rang ≥ 2. On dit que E est A-stable (resp. A-semistable) si pour $\forall\, \mathcal{F} \subset E$, $0 < rg(\mathcal{F}) < rg(E)$,

$$\mu_A(\mathcal{F}) < \mu_A(E) \quad (\text{resp. } \mu_A(\mathcal{F}) \leq \mu_A(E)).$$

Théorème (Bogomolov)

Soit $E \to (X,A)$ un fibré vectoriel A-semistable. Alors

$$c_2(E)\cdot A^{n-2} \geq \frac{n-1}{2n} c_1^2(E)\, A^{n-2}$$

Question 4

Soit X une variété de Fano lisse et $\rho(X)=1$. T_X semistable ?

Théorème

Soit X une variété de Fano lisse et $\rho(X)=1$. $n=\dim(X)$.

- T_X est stable si
  1) $r_X=1$ (Reid)
  2) $r_X > \frac{n+1}{2}$ (Hwang)
  3) $\dim(X)\leq 5$ (Peternell – Wiśniewski, Hwang)
  4) X homogène (Ramanan, Azad – Biswas)

  (M : un espace hermitien symétrique irréductible de type compact, $\Rightarrow$ M est Fano et $\mathrm{Pic}(M)\cong \mathbb{Z}\,\mathcal{O}_M(1)$ + ample.)

  5) $X = H_1\cap\cdots\cap H_r$, $H_i\in|\mathcal{O}_M(d_i)|$ $d_i\geq 2$, général (L, '18)
- T_X est semistable si $\dim(X)=6$.

• une inégalité de type Bogomolov pour les variétés de Fano.

Théorème (L, '17)

Soit X une variété de Fano lisse de dimension $n\geq 2$ et $\rho(X)=1$. Si $r_X\leq n$, alors

$$c_2(X)\cdot H^{n-2}\geq \frac{r_X(r_X-1)}{2}H^n \qquad (*)$$

Remarque

1) Théorème de Bogomolov $\Rightarrow$ $c_2(X)\cdot H^{n-2}\geq \frac{(n-1)r_X^2}{2n}H^n$.

Cette inégalité est plus forte que $(*)$.

2) Si $r_X>n$, alors $X\cong \mathbb{P}^n$ et T_X est stable.

3) $n\geq 6$ et $\rho(X)=1$,

$$h^0(X,H)\geq \frac{-n^2+7n-8}{24}H^n + \frac{(n-3)(n-4)}{24}H^n + n-3$$
$$\geq \frac{1}{6}H^n + n-3$$
$$> n-3$$

$\Rightarrow$ X Fano lisse et $r_X=n-3$, alors $h^0(X,H)\geq n-2$.

$\Rightarrow$ $\exists$ $X=X_0\supsetneq X_1\supsetneq\cdots\supsetneq X_{n-3}$ X_i à singularités canoniques.

• Applications à l'étude de géométrie de X.

Corollaire (L, '17)

Soit X une variété de Fano lisse de dimension n. et $r_X = n-3$.
H le diviseur fondamental de X.

1) $H^{2n-2}(X, \mathbb{Z})$ est engendré par courbes. (Höring - Voisin)
2) $Bs|mH| = \phi$ pour $m \geq 7$. (Oguiso - Peternell).
3) $\Phi_{|mH|}$ est birationnelle pour $m \geq 5$. (Jiang).