Université de Rennes 1

Centre de Mathématiques Henri Lebesgue

Mémoire de Master 2

Techniques L^2 en Géométrie Complexe

Auteur :
Jie Liu

Directeur du mémoire :
M. Sébastien Boucksom

juin 2015

Table des matières

Introduction

Dans ce travail, nous donnons des méthodes analytiques dans l'étude des singularités des fonctions plurisousharmoniques.

On commence d'abord par présenter un aperçu de notions en géométrie complexe et de la notion de plurisousharmonicité, avant de démontrer le théorème d'existence de Hörmander et le théorème d'extension L^2 d'Ohsawa-Takegoshi. Nous donnons une nouvelle preuve du théorème d'Ohsawa-Takegoshi, d'après Berndtsson et Lempert et montrons le théorème de l'invariance des plurigenres de Siu. Puis, on introduit le premier invariant pour mesurer singularités des fonctions plurisousharmoniques, noté nombres de Lelong. Par une méthode d'approximation de Deamilly, nous donnons une preuve simple du théorème de semi-continuité de Siu. On évoquera ensuite les résultats fondamentaux d'idéaux multiplicateurs, du théorème de cohérence de Nadel, du théorème d'annulation de Nadel, puis nous donnons deux applications : théorème de prolongement de Kodaire et théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg. Après proposer l'exposant de singularité complexe, nous donnerons la preuve du théorème de semi-continuité. Enfin, nous donnerons un résultat récent, la conjecture d'ouverture forte, qui a été originalement conjecturé par Demailly et Kollár et a été démontré par Guan et Zhou en 2013.

Chapitre 1

Notions Fondamentales en Géométrie Complexe

On rappelle dans ce chapitre des matières fondamentales en géométrie complexe et les principales propriétés des variétés complexes. Ces résultats seront utilisés librement par la suit. Un autre but de ce chapitre est de fixer les notions que on utilise par la suite. Nous ne donnerons pas toutes les preuves, car elles sont présentes dans les livres de références [Huy06],[Dem12b] ou encore [MM10].

1.1 Variétés hermitiennes

Nous considérons dans cette section une structure supplémentaire sur les variété complexe, à savoir une métrique hermitienne.

Définition 1.1.1. *Une structure presque complexe sur une variété différentiable X est la donnée d'un endomorphisme J de T_X tel que $J^2 = -1$.*

Exemple 1.1.1. Une variété complexe admet naturellement une structure presque complexe Soit $z_1 = x_1 + iy_1, \cdots, z_n = x_n + iy_n$ sont des coordonnées au voisinage de $x \in X$. Alors la structure presque complexe J est définie en x par

$$J : T_{X,\mathbb{R},x} \to T_{X,\mathbb{R},x}, \frac{\partial}{\partial x_i} \mapsto \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_i} \mapsto -\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

J est bien définie d'après l'équation de Cauchy-Riemann.

Soit X une variété complexe. Alors la structure presque complexe J sur X admet un prolongement sur l'espace tangent complexifié $T_{X,\mathbb{C}}$ par $\mathbb{C}$-linéarité. Alors les $\pm i$-espaces propres sont notés par T_X et $\bar{T}_X$, respectivement, i.e.

$$T_X = \{v \in T_{X,\mathbb{C}} : J(v) = iv\} \text{ et } \bar{T}_X = \{v \in T_{X,\mathbb{C}} : J(v) = -iv\}.$$

En plus, $T_{X,\mathbb{C}}$ admet la décomposition $T_{X,\mathbb{C}} = T_X \oplus \bar{T}_X$. Localement, on peut prendre $\frac{\partial}{\partial z_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z_n}$ comme une base de T_X et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}$ comme une base de $\bar{T}_X$.

Remarque 1.1.1. Soit $T^*_{X,\mathbb{R}}$ l'espace cotangent de X. Alors la structure presque complexe J sur X aussi définie un endomorphisme de $T^*_{X,\mathbb{R}}$, noté aussi par J. Soient $\omega \in T^*_{X,\mathbb{R}}$ et $v \in T_{X,\mathbb{R}}$. Alors $J(\omega)(v) := \omega(Jv)$. Puis nous pouvons faire la même chose pour $T^*_{X,\mathbb{R}}$ comme ci-dessus pour $T_{X,\mathbb{R}}$. En particulier, l'espace cotangent complexifié $T^*_{X,\mathbb{C}}$ admet la décomposition $\Omega^{1,0}_X \oplus \Omega^{0,1}_X$ avec $\Omega^{1,0}_X = T^*_X$ et $\Omega^{0,1}_X = \bar{T}^*_X$. En plus, $dz_1, \cdots, dz_n$ est une base de $\Omega^{1,0}_X$ et $d\bar{z}_1, \cdots, d\bar{z}_n$ est une base de $\Omega^{0,1}_X$.

Définition 1.1.2. *Une métrique hermitienne sur X est une métrique riemannienne h sur X telle que $J^*h = h$.*

On aussi considère l'extension de h sur le fibré tangent complexifié $T_X \otimes \mathbb{C}$ comme suite, i.e.

$$h(v \otimes \lambda, w \otimes \mu) := (\lambda\bar{\mu})h(v, w)$$

On note que la composition d'application

$$s^{1,0} : T_{X,\mathbb{R}} \hookrightarrow T_{X,\mathbb{C}} \to T_X,$$

où la deuxième application est la projection naturelle, est un isomorphisme entre $(T_{X,\mathbb{R}}, J)$ et (T_X,i) [1]. On prend deux vecteurs v, w dans l'espace tangent réel $T_{X,\mathbb{R},x}$, alors on a

$$\begin{aligned} 2h(s^{1,0}v, s^{1,0}w) &= 2h(\frac{1}{2}(v - iJ(v)), \frac{1}{2}(w - iJ(w))) \\ &= \frac{1}{2}h(v - iJ(v), w - iJ(w)) \\ &= \frac{1}{2}(h(v, w) + ih(v, J(w)) - ih(J(v), w) + h(Jv, Jw)) \\ &= h(v, w) + ih(v, Jw) \end{aligned}$$

Alors,

$$h(v, w) = 2\mathrm{Re}h(s^{1,0}v, s^{1,0}w).$$

On aussi définit la forme fondamentale associée à h,

$$\omega(v, w) := h(v, Jw).$$

Notons que

$$\omega(v, w) = h(v, Jw) = h(Jv, J^2w) = -h(Jv, w) = -h(w, Jv) = -\omega(w, v).$$

Alors, ω est une 2-forme réelle. En effet, la relation

$$\omega(v, w) = 2\mathrm{Im}h(s^{1,0}v, s^{0,1}w)$$

montre que ω est une $(1, 1)$-forme.

1. On voit ($T_{X,\mathbb{R}}$,J) comme un espace complexe : $iv := Jv$

Sur le fibré $T_X^{1,0}$, la forme hermitienne h peut être donnée par une matrice hermitienne, notée par $\frac{1}{2}(h_{i\bar{j}})$. Précisément, localement on a

$$h\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\frac{\partial}{\partial z_i},\sum_{j=1}^{n}\eta_j\frac{\partial}{\partial z_j}\right)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}h_{i\bar{j}}\xi_i\bar{\eta}_j$$

Alors, la métrique hermitienne sur X peut s'écrire comme suite,

$$h=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}h_{i,\bar{j}}dz^i\otimes d\bar{z}^j,$$

Exactement, on a

$$\omega=\frac{i}{2}\sum_{i,j=1}^{n}h_{i,\bar{j}}dz^i\wedge d\bar{z}^j.$$

Pour une variété orientable de dimension m muni d'une métrique riemannienne g, donnée par (g_{ij}) localement, on définit la forme volume associée à g comme suite.

$$\Omega=\sqrt{det(g_{ij})}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$$

Pour une variété complexe de dimension n muni d'une métrique hermitienne, avec les notations ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}
\omega^n &= (\frac{i}{2})^n h_{i_1\bar{j}_1}\cdots h_{i_n\bar{j}_n}dz^{i_1}\wedge d\bar{z}^{j_1}\wedge\cdots\wedge dz^{i_n}\wedge d\bar{z}^{j_n}\\
&= \frac{(-1)^{n^2/2}}{2^n}h_{i_1\bar{j}_1}\cdots h_{i_n\bar{j}_n}dz^{i_1}\wedge\cdots\wedge dz^{i_n}\wedge d\bar{z}^{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{j_n}\\
&= (\sum_{i_1,\cdots,\bar{j}_n}\sigma^{1\cdots n}_{i_1\cdots i_n}\sigma^{1\cdots n}_{j_1\cdots j_n}h_{i_1\bar{j}_1}\cdots h_{i_n\bar{j}_n})\frac{(-1)^{n^2/2}}{2^n}dz^1\wedge\cdots\wedge dz^n\wedge d\bar{z}^1\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^n\\
&= n!det(h_{i\bar{j}})\frac{dz^1\wedge d\bar{z}^1}{-2i}\wedge\cdots\wedge\frac{dz^n\wedge d\bar{z}^n}{-2i}\\
&= n!det(h_{i\bar{j}})dx^1\wedge dy^1\wedge\cdots\wedge dx^n\wedge dy^n
\end{aligned}$$

Alors,

$$\Omega=\frac{1}{n!}\omega^n.$$

Proposition 1.1.1. *Si X est une variété hermitienne muni d'une forme hermitienne ω et Y est une sous-variété de dimension k de X muni de la métrique hermitienne induit par ω, alors la forme volume hermitienne de Y est*

$$\Omega_Y=\frac{1}{k!}(\omega|_Y)^k=\frac{1}{k!}\omega^k|_Y.$$

1.2 Connexion

Soit $\pi : V \to M$ un fibré vectoriel réel de rang r. $\Gamma(M,V)$ est l'espace de sections globales de V.

Définition 1.2.1. *Une connexion D sur $V \to M$ est une application linéaire*

$$D : \Gamma(M,V) \to \Gamma(M, T^*M \otimes V)$$

qui vérifie la règle de Leibniz :

$$D(fs) = df \otimes s + fDs.$$

où f est une fonction sur M et s est une section de V.

Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ un champ de repères local lisse de V. Si D est une connexion sur V, la matrice de 1-formes ω_i^j est définie par

$$De_i = \omega_i^j e_j$$

qui est dit la matrice de la connexion dans le champ de repères $(e_1, \cdots, e_n)$. Par la règle de Leibniz, on a

$$D(s^i e_i) = (ds^i + s^j \omega_j^i) e_i.$$

Remarque 1.2.1. Souvent on utilise la notation $Ds = ds + s\omega$.

On change de champ de repères. On note $g = (g_i^j)$ la matrice passage, ce veux dire que $\widetilde{e}_i = g_i^j e_j$ pour un autre champ de repères $(\widetilde{e}_1, \cdots, \widetilde{e}_n)$. Alors,

$$\widetilde{\omega} = d(G)G^{-1} + G\omega G^{-1}.$$

Soit V un fibré vectoriel muni d'une métrique g.

Définition 1.2.2. *On dit que g est compatible avec la métrique g si*

$$d(g(x,t)) = g(Ds,t) + g(s,Dt).$$

où $h(\alpha \otimes s, s') := \alpha h(s,s')$ et $h(s, \alpha \otimes s') := \alpha h(s,s')$.

Une connexion qui est compatible avec une métrique fixée n'est pas forcément unique. Dan un champ de repères local, on

$$d(g_{ij}s^i t^j) = d(g_{ij})t^i t^j + g_{ij}(ds^i t^j + s^i dt^j)$$

D'ailleurs, on a

$$g(Ds,t) + D(s,Dt) = g_{ij}(ds^i t^j + s^i dt^j) + g_{ij}s^\ell \omega_\ell^i t^j + g_{ij}s^i \omega_\ell^j t^\ell.$$

Alors, on obtient une relation entre matrices.

$$dg - g\omega - \omega^T g = 0.$$

Cette équation a beaucoup de solutions.

On peut aussi définir connexions sur un fibré complexe comme le cas réel. Soit (V,h) un fibré complexe muni d'une métrique hermitienne h.

Définition 1.2.3. *Une connexion est compatible avec la métrique hermitienne h si*

$$d(h(s_1, s_2)) = h(Ds_1, s_2) + h(s_1, Ds_2).$$

Si M est une variété complexe, le fibré $T_X^* \otimes \mathbb{C}$ admet la décomposition $T_X^* \otimes \mathbb{C} = \bigwedge^{1,0} X \oplus \bigwedge^{0,1} X$. Alors, pour un fibré vectoriel complexe $V \to X$, une connexion D admet aussi une décomposition comme

$$D = D^{1,0} + D^{0,1}.$$

Remarque 1.2.2. $D^{1,0}$ et $D^{0,1}$ ne sont pas connexions.

On supposer que V est aussi holomorphe. On a un opérateur différentiel spécial sur V. Si $(e_1, \cdots, e_n)$ est un champ de repères holomorphe, alors cet opérateur est donné par la formule suivante :

$$s = s^i e_i \mapsto (\bar{\partial} s^i) \otimes e_i.$$

Cet opérateur est bien défini car V est holomorphe : exactement, si $(\widetilde{e}_1, \cdots, \widetilde{e}_n)$ est un autre champ de repères holomorphe locale de V, alors

$$\widetilde{e}_j = g_j^i e_i.$$

pour des fonctions holomorphes g_j^i. Alors,

$$s^j = \widetilde{s}^i g_i^j.$$

Donc, on a

$$(\bar{\partial}\widetilde{s}^j) \otimes \widetilde{e}_j = (\bar{\partial}\widetilde{s}^j) \otimes g_j^i e_i = \bar{\partial}(\widetilde{s}^j g_j^i) \otimes e_i = (\bar{\partial} s^i) \otimes e_i.$$

On note aussi cet opérateur différentiel par $\bar{\partial}$.

Définition 1.2.4. *Une connexion D sur un fibré vectoriel holomorphe $V \to M$ est dit connexion de Chern si*

$$D = D^{1,0} + \bar{\partial}.$$

Théorème 1.2.1. *Pour un fibré vectoriel holomorphe hermitienne, il existe une connexion de Chern unique qui est compatible avec la métrique hermitienne.*

Définition 1.2.5. *Une métrique Kählérienne sur une variété complexe est une métrique hermitienne g telle que la forme fondamentale associée à g est fermée. Une variété complexe qui admet une métrique Kählérienne est dit une variété Kählérienne.*

Proposition 1.2.2. *La métrique g est Kählérienne si et seulement s'il existe un système de coordonnées z sur X tel que*

$$g = \sum_\alpha dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\alpha + O(|z|^2).$$

Exemple 1.2.1 (Métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^n$)**.** Soit $\mathbb{P}^n$ l'espace projective complexe de dimension n. Pour l'ouvert standard U_i et l'isomorphisme $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$, $(z_0 : \cdots : z_n) \mapsto (\frac{z_0}{z_i}, \cdots, \widehat{\frac{z_i}{z_i}}, \cdots, \frac{z_n}{z_i})$. On définit

$$\omega_i := \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\left(\sum_{\ell=0}^{n}|\frac{z_\ell}{z_i}|^2\right)$$

Alors, on obtient une métrique Kählérienne ω_{FS} qui est exactement ω_i sur U_i.

Soient $V_1 \to M$ et $V_2 \to M$ fibrés vectoriels sur M muni de connexions D_1 et D_2 respectivement. Alors, pour le fibré $V_1 \times V_2$ sur X, on peut définir une connexion comme suite.

$$D(s_1 \times s_2) = (D_1 s_1) \times s_2 + s_1 \times (D_2 s_2).$$

Ici $\times$ peut être $\otimes$ ou $\wedge$.

Exemple 1.2.2 (Connexion induite sur fibrés déterminants)**.** Soit $V \to X$ un fibré vectoriel de rang r. Soit D_V une connexion sur V. On considère le fibré en droites

$$detV \to X.$$

On fixe un champ de repères $(e_1, \cdots, e_n)$ de V, alors $e_1 \wedge \cdots \wedge e_r$ est un champ de repères de $detV$. Alors,

$$D_{detV}(e_1 \wedge \cdots \wedge e_r) = \sum_j (e_1 \wedge \cdots \wedge De_j \wedge \cdots \wedge e_r) = \sum_j \omega_j^j e_1 \wedge \cdots \wedge e_r$$

i.e. la matrice de la connexion D_{detV} est exactement la trace de la matrice de la connexion D_V.

Définition 1.2.6. *Soit $V \to M$ un fibré vectoriel avec connexion D. On définit l'application suivante :*

$$D : \Gamma(M, V \otimes \bigwedge^k(T_M^*)) \to \Gamma(M, V \otimes \bigwedge^{k+1}(T_M^*))$$

Si α est une $k-$forme locale sur M et s est une section locale de E, alors

$$D(\alpha \otimes s) = d(\alpha) \otimes s + (-1)\alpha \wedge D(s).$$

1.3 Courbure

Définition 1.3.1. *Soit $V \to M$ un fibré vectoriel avec une connexion D. Alors la courbure de (V, D) est l'opérateur*

$$DD : \Gamma(M, V) \to \Gamma(M, V \otimes \Lambda^2(T_M^*)).$$

Si ω est la matrice de D dans un champ de repères, pour une section locale s de V,

$$\begin{aligned} DDs &= D(ds + s\omega) \\ &= d(ds + s\omega) - (ds + \omega) \wedge \omega \\ &= ds \wedge \omega + sd\omega - ds \wedge \omega - s\omega \wedge \omega \\ &= s(d\omega - \omega \wedge \omega) \end{aligned}$$

Maintenant, on définit la matrice de 2-formes,

$$\Omega := d\omega - \omega \wedge \omega.$$

Pour un autre champ de repères avec la matrice de la connexion $\widetilde{\omega}$, on a

$$\widetilde{\omega} = (dG)G^{-1} + G\omega G^{-1}.$$

Notons que $\widetilde{\Omega} = d\widetilde{\omega} - \widetilde{\omega} \wedge \widetilde{\omega}$, on obtient

$$\widetilde{\Omega} = G\Omega G^{-1}.$$

Théorème 1.3.1. *Soit $V \to M$ un fibré vectoriel complexe de rang r muni d'une connexe avec courbure Ω.*

1) Les coefficients $P_j(\Omega)$ du polynôme de Chern

$$det\left(I + t\frac{i}{2\pi}\Omega\right) = 1 + \sum_{j=1}^{r} P_j(\Omega)t^j$$

sont $2j$-formes fermée sur M.

2) En plus, pour chaque j, la classe de cohomologie de $P_j(\Omega)$ est indépendante à la connexion sur $V \to M$.

Définition 1.3.2. *Avec les notations ci-dessus du théorème 1.3.1, la classe de cohomologie*

$$c_i(V) := [P_i(\Omega)] \in H^{2i}(M, \mathbb{C})$$

est dite la i-ième classe de Chern de V.

Maintenant, on fixe un fibré holomorphe hermitienne $(V, h) \to X$. Alors il existe une unique connexion de Chern, et nous allons calculer la courbure de cette connexion. On fixe un champ de repères e_i de V, et on pose

$$h_{i\bar{j}} = h(e_i, e_j).$$

Alors, d'après la définition, on a

$$\begin{aligned}
dh(e_i, e_j) = dh_{i\bar{j}} &= h(De_i, e_j) + h(e_i, De_j) \\
&= h(\sum_l \omega_{il} e_l, e_j) + h(e_i, \sum_r \omega_{jr} e_r) \\
&= \sum_l \omega_{il} h_{l\bar{j}} + \sum_r \bar{\omega}_{jr} h_{i\bar{r}}
\end{aligned}$$

Notons que D est une connexion de Chern, alors

$$\partial h_{i\bar{j}} = \sum_l \omega_{il} h_{l\bar{j}}.$$

En formes de matrices, ça veut dire que

$$\partial H = \omega H.$$

Donc, la matrice de la connexion de Chern est $\partial H H^{-1}$. D'ailleurs, la courbure Ω est donnée par

$$\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega.$$

On obtient la proposition suivante.

Proposition 1.3.2. *La courbure de la connexion de Chern du fibré holomorphe hermitienne $(V,h) \to X$ est donnée par la formule*

$$\Omega = \bar{\partial}(\Omega) = \bar{\partial}(\partial H H^{-1}).$$

Démonstration. D'abord, notons que $HH^{-1} = I$, donc on a $\partial H^{-1} = -H^{-1}\partial H H^{-1}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\Omega &= d\omega - \omega \wedge \omega \\
&= d(\partial H H^{-1}) - \partial H H^{-1} \wedge \partial H H^{-1} \\
&= (\partial + \bar{\partial})(\partial H H^{-1}) - \partial H H^{-1} \wedge \partial H H^{-1} \\
&= \bar{\partial}(\partial H H^{-1}) - \partial H \wedge \partial H^{-1} - \partial H H^{-1} \wedge \partial H H^{-1} \\
&= \bar{\partial}(\partial H H^{-1}).
\end{aligned}$$

On finit la démonstration. $\square$

Proposition 1.3.3 (Courbure de fibrés déterminants)**.** *Soit $(V,D) \to X$ un fibré vectoriel de rang r avec connexion D. Soit $(\det V, trace(D)) \to X$ le fibré déterminant. Alors*

$$\Omega(trace(D)) = trace(\Omega(D)).$$

Démonstration. Soit $(e_1, \cdots, e_r)$ un champ de repères de V. Alors

$$\begin{aligned}
(trace(D))^2(e_1 \wedge \cdots \wedge e_r) &= trace(D)(\sum_i e_1 \wedge \cdots \wedge De_i \wedge \cdots \wedge e_r) \\
&= trace(D)(\sum_i \omega_{ii} e_1 \wedge \cdots \wedge e_r) \\
&= \sum_i (d\omega_{ii}) e_1 \wedge \cdots \wedge e_r - (\sum_i \omega_{ii})(\sum_i \omega_{ii}) e_1 \wedge \cdots \wedge e_r \\
&= trace(D^2)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_r).
\end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration. $\square$

En plus, soit $(V,h) \to X$ un fibré holomorphe hermitienne de rang r. Alors $\det h$ est une métrique hermitienne sur le fibré en droites $\det V \to X$ dont la connexion de Chern est

$$\omega = \frac{1}{\det h}\partial(\det h).$$

Alors la matrice de courbure de $\det h$ est

$$\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega = \bar{\partial}(\frac{1}{\det h}\partial(\det h)) = \bar{\partial}(\partial \log \det h) = \partial\bar{\partial}(-\log \det h).$$

Soit X une variété complexe de dimension n. Le fibré canonique de X, noté par K_X, est le fibré en droites $\det T_X^{*1,0}$. Les sections locales de K_X est des formes holomorphes.

En plus, si X est une variété hermitienne complexe avec une métrique hermitienne h, la courbure de $(K_X, \det(h^{-1}))$ est exactement $-trace(\Omega)$, où Ω est la courbure de (X, h).

Définition 1.3.3. *Soit (X, h) est une variété Kählérienne avec une métrique Kählérienne. Alors la courbure de Ricci de (X, h) est donnée par*

$$Ricci(h) := trace(\Omega(h)).$$

Maintenant, nous allons considérer fibrés en droites. Soit $L \to X$ un fibré en droites avec une métrique hermitienne h. Alors un champ de repères $\{e_i\}$ au voisinage U_i induit une fonction lisse $\varphi_i := -\log h(e_i, e_i)$. Donc, chaque $v \in L|_{U_i}$ peut s'écrire comme $v = v_i e_i$ avec $v_i \in \mathbb{C}$, et donc

$$h(v, v) = |v_i|^2 e^{-\varphi_i}.$$

Proposition 1.3.4. *La forme de la courbure de fibré en droites est globalement définie.*

Démonstration. D'après la formule

$$\Omega_j = g_{ij}\Omega_i g_{ij}^{-1} = \Omega_i.$$

Ce qui conclut la preuve. □

En plus, si $L \to X$ est holomorphe, alors la courbure de la connexion de Chern est la $(1, 1)$-forme

$$\Omega = \partial\bar{\partial}\varphi_i$$

sur U_i. Pour un fibré en droites holomorphe, on toujours choisit un champ de repères e et $\varphi = -\log h(e, e)$. Donc, la formule

$$\Omega = \partial\bar{\partial}\varphi$$

de la courbure est indépendante à le choix de e.

Théorème 1.3.5. *Pour un fibré en droites L, la classe de Chern est la classe de cohomologie de $\frac{i}{2\pi}\Omega$, i.e.*

$$c_1(L) = \left[\frac{i}{2\pi}\Omega\right].$$

1.4 Faisceaux cohérents

Avant d'introduction la notion de faisceau cohérent, nous rappelons les notions de modules (localement) de type fini et (localement) libres sur un faisceau d'anneaux. Tous les anneaux A apparaissant dans la suite seront supposés commutatifs et unitaires, sauf mention explicite.

Soit donc $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux (commutatifs, unitaires) sur un espace topologique X. Un faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$-modules (ou plus brièvement un $\mathcal{A}$-module) est un faisceau d groupes abéliens tel que chaque espace de section $\mathcal{F}(U)$ a une structure de $\mathcal{A}(U)$-module, avec une loi de multiplication externe compatible aux restrictions.

Définition 1.4.1. *Soit $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux sur un espace topologique X et soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{A}$-modules. Alors $\mathcal{F}$ est dit :*

*1) de **type fini** s'il existe des générateurs globaux $F_1, \cdots, F_N \in \mathcal{F}(X)$ donnant un morphisme surjectif de $\mathcal{A}$-modules sur X tout entier*

$$\mathcal{A}^{\oplus N} \to \mathcal{F}, \mathcal{A}_x^{\oplus N} \ni (\omega_1, \cdots, \omega_N) \mapsto \sum_{1 \leq j \leq N} \omega_j F_{j,x} \in \mathcal{F}_x, x \in X.$$

*2) **localement de type fini**, si tout point $x_0 \in X$ admet un voisinage U sur lequel il existe des générateurs locaux $F_1, \cdots, F_N \in \mathcal{F}(U)(N = N(x_0))$, donnant un morphisme surjectif de $\mathcal{A}$-modules au dessus de U*

$$\mathcal{A}|_U^{\oplus N} \to \mathcal{F}|_U, \mathcal{A}_x^{\oplus N} \ni (\omega_1, \cdots, \omega_N) \mapsto \sum_{1 \leq j \leq N} \omega_j F_{j,x} \in \mathcal{F}_x, x \in U.$$

*3) **libre de rang r** s'il existe des générateurs globaux $F_1, \cdots, F_r \in \mathcal{F}(X)$ tels que le morphisme du* 1) *(avec $N = r$) soit un isomorphisme de $\mathcal{A}$-modules au dessus de X.*

*4) **Localement libre de rang r** si tout point $x_0 \in X$ admet un voisinage U sur lequel il existe des générateurs locaux $F_1, \cdots, F_r \in \mathcal{F}(U)$ tels que le morphisme du* 2) *(avec $N = r$) soit un isomorphisme de $\mathcal{A}$-modules au dessus de U.*

Maintenant,avant donnant la définition de cohérence, on a besoin d'une autre notion. Si U est un ouvert de X et si $F_1, \cdots, F_q \in \mathcal{F}(U)$ sont des sections de $\mathcal{F}$ sur U, le noyau du morphisme de $\mathcal{A}$-modules $F = (F_1, \cdots, F_q) : \mathcal{A}|_U^{\oplus q} \to \mathcal{F}|_U$ défini par

$$\mathcal{A}(V)^{\oplus q} \ni (g_1, \cdots, g_q) \mapsto \sum_{1 \leq j \leq q} g_j F_j|_V \in \mathcal{F}(V), V \subset U$$

est un sous-$\mathcal{A}$-module $\mathcal{R}(F_1, \cdots, F_q)$ de $\mathcal{A}|_U^{\oplus q}$, appelé **faisceau des relations** entre les sections $F_1, \cdots, F_q$.

Définition 1.4.2. *Un faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$-modules sur X est dit **cohérent** si :*

1) $\mathcal{F}$ est localement de type fini sur X ;

2) pour tout sous-ensemble ouvert U de X et tout système de sections $F_1, \cdots, F_q \in \mathcal{F}(U)$, le faisceau des relations $\mathcal{R}(F_1, \cdots, F_q)$ est localement de type fini sur U.

Soit $x_0 \in X$ un point fixé. Par l'hypothèse 1), il existe un voisinage U de x_0 et des sections $F_1, \cdots, F_q \in \mathcal{F}(U)$ réalisant un $morphismesurjectif$ de $\mathcal{A}|_U$-modules

$$F = (F_1, \cdots, F_q) : \mathcal{A}|_U^{\oplus q} \to \mathcal{F}|_U,$$

et l'hypothèse 2) implique que le noyau $\mathcal{R}(F_1, \cdots, F_q)$ de F est localement de type fini. Par conséquent, il existe un voisinage $V \subset U$ de x_0 et un morphisme surjectif

$$G : \mathcal{A}|_V^{\oplus p} \to \mathcal{R}(F_1, \cdots, F_q)|_V \subset \mathcal{A}|_V^q$$

sur le noyau de F au dessus de V. On voit ainsi qu'on obtient une $prsentationfinie$ de $\mathcal{F}$ au dessus de V, c'est-à-dire une suite exacte de $\mathcal{A}|_V$-modules

$$\mathcal{A}|_V^{\oplus p} \xrightarrow{G} \mathcal{A}|_V^{\oplus q} \xrightarrow{F} \mathcal{F}|_V \longrightarrow 0,$$

où G est donné par une matrice $p \times p$ de sections (G_{jk}) de $\mathcal{A}(U)$ dont les colonnes $(G_{j1}), \cdots, (G_{jp})$ sont des générateurs de $\mathcal{R}(F_1, \cdots, F_q)$.

Proposition 1.4.1 (Résultats fondamentaux de faisceaux cohérents).

1) *Soit $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morphisme de $\mathcal{A}$-modules cohérents. Alors $Im(\varphi)$ et $Ker(\varphi)$ sont des $\mathcal{A}$-modules cohérents.*
2) *(Serre). Soit $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{S} \to \mathcal{G} \to 0$ une suite exacte de $\mathcal{A}$-modules. Si deux des $\mathcal{A}$-modules $\mathcal{F}, \mathcal{S}, \mathcal{G}$ sont cohérents, alors les trois sont cohérents.*
3) *Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des sous-$\mathcal{A}$-modules cohérents d'un $\mathcal{A}$-module cohérent $\mathcal{S}$, l'intersection $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un $\mathcal{A}$-module cohérent.*
4) *Si $\mathcal{A}$ est un faisceau cohérent d'anneaux, tout sous-module localement de type fini de $\mathcal{A}^{\oplus p}$ est cohérent. En particulier, si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{A}$-module cohérent et $F_1, \cdots, F_q \in \mathcal{F}(U)$, le faisceau des relations $\mathcal{R}(F_1, \cdots, F_q) \subset \mathcal{A}^{\oplus p}$ est lui aussi cohérent.*
5) *(Oka) Pour toute variété analytique complexe X, le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ est cohérent.*

Le théorème d'Oka [Oka, 1950] peut être considéré comme une extension profonde de la propriété de noethérianité. Soient $F_1, \cdots, F_q \in \mathcal{O}(U)$. Puisque $\mathcal{O}_{X,s}$ est noethérien, on sait déjà que les fibres $\mathcal{R}(F_1, \cdots, F_q)_x \subset \mathcal{O}_{M,x}^{\oplus q}$ sont de type fini, mais le fait nouveau important exprimé par le théorème est que le faisceau des relations est localement de type fini, c'est-à-dire que les "mêmes" générateurs peuvent être utilisée pour engendrer les fibres dans un voisinage de chaque point.

Proposition 1.4.2 (Propriété noethérienne forte). *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau anlytique cohérent sur une variété complexe X et $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots$ une suite croissante de sous-faisceaux cohérents de $\mathcal{F}$. Alors la suite $(\mathcal{F}_k)$ est stationnaire sur tout sous-ensemble compact de X.*

Chapitre 2

Plurisousharmonicité

Dans ce chapitre, on introduira les outils de fonctions de plusieurs variables complexes. Nous définissons les notions de domaine d'holomorphie, convexité holomorphe et pseudoconvexité pour les ouverts de $\mathbb{C}^n$. Nous aussi donnerons la notion de variété de Stein qui est un objet analogue comme variété affine en géométrie algébrique. Pour les détails et preuves de théorèmes, nous nous référerons [LT12] et [Dem12b].

2.1 Domaines d'holomorphie et convexité holomorphe

D'après le phénomène très connu de Hartogs, nous avons vu qu'il existe des ouverts $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ tels que toute fonction holomorphe sur Ω s'étende holomorphiquement à un ouvert plus grand. Cela nous conduit à introduire la notion suivant :

Définition 2.1.1. *Un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ est appelé domaine d'holomorphie s'il n'existe pas d'ouverts Ω_1 et Ω_2 de $\mathbb{C}^n$ ayant les propriétés suivantes :*

1) $\varnothing \neq \Omega_1 \subset \Omega_2 \cap \Omega$;

2) Ω_2 est convexe et n'est pas contenu dans Ω ;

3) Pour toute $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, il existe une fonction $f_2 \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $f = f_2$ sur Ω_1.

La notion de domaine d'holomorphie n'est pas vraiment intéressante que dans $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, car dans $\mathbb{C}$, tout ouvert Ω est un domaine d'holomorphie (pour $z_0 \in \partial\Omega$, il suffit de considérer la fonction $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$).

Exemple 2.1.1. 1) Un polydisque ou plus généralement un produit de domaines plans est un domaine d'holomorphie.

2) Tout ouvert convexe de $\mathbb{C}^n$ est un domaine d'holomorphie.

Nous allons caractériser les domaines d'holomorphie en terme de convexité par rapport aux fonctions holomorphes.

Définition 2.1.2. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et K un compact de Ω, on définit l'enveloppe holomorphiquement convexe $\widehat{K}_\Omega$ de K par*

$$\widehat{K}_\Omega = \{z \in \Omega : |f(z)| \leq \sup_K |f|, \forall f \in \mathcal{O}(\Omega)\}.$$

Proposition 2.1.1. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et K un compact de Ω, alors $\widehat{K}_\Omega$ est contenu dans l'enveloppe convexe de K.*

D'après la proposition ci-dessus, nous voyons que $\widehat{K}_\Omega$ est toujours borné et fermé dans Ω, mais en général ce n'est pas un compact de Ω. Il est alors naturel d'introduire la notion suivante :

Définition 2.1.3. *1) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$. On dira que Ω est holomorphiquement convexe si pour tout compact K de Ω, $\widehat{K}_\Omega$ est relativement compact dans Ω.*

2) Si K est un compact de Ω, K est $\mathcal{O}(\Omega)$-convexe si et seulement si $K = \widehat{K}_\Omega$.

Maintenant nous énonçons le théorème de caractérisation des domaines d'holomorphie en terme de convexité holomorphe obtenu par H. Cartan et P. Thullen.

Théorème 2.1.2 (H. Cartan et P. Thullen)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) Ω est un domaine d'holomorphie.

2) $\mathrm{dist}(\widehat{K}_\Omega, \partial\Omega) = \mathrm{dist}(K, \partial\Omega)$, pour tout compact de Ω.

3) Ω est holomorphiquement convexe.

4) Il existe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que pour tout couple d'ouverts Ω_1 et Ω_2 de $\mathbb{C}^n$ satisfaisant les contions 1) et 2) de la Définition 2.1.1 on ne peut pas trouver de fonction $\widetilde{f} \in \mathcal{O}(\Omega_2)$ telle que $\widetilde{f} = f$ sur Ω_1.

2.2 Fonctions plurisousharmoniques

Fonctions plurisousharmonique a été introduis par Lelong et Oka. Ces nouvelles fonctions nous serviront à définir la pseudoconvexité au paragraphe prochain.

Définition 2.2.1. *Soit $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ une fonction sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. On dit que f est semi-continue supérieurement en $x_0 \in \Omega$, si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée,*

– pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage U de x_0 tel que

$$\forall x \in U, f(x) < f(x_0) + \epsilon;$$

– $\limsup_{x \to x_0} f(x) < f(x_0)$ *où* $\limsup$ *désigne la limite supérieure d'une fonction en un point ;*

– L'ensemble $\{x \in \Omega | f(x) < a\}$ est ouvert pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Intuitivement, une belle fonction f est dite **semi-continue supérieurement** en x_0 si, lorsque x_0 est proche de x_0, $f(x)$ est soit proche de $f(x_0)$, soit inférieur à $f(x_0)$.

Définition 2.2.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ est dite sous-harmonique dans Ω si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*
– u est semi-continue supérieurement ;
– u possède la propriété de sous-moyenne : pour tout point $x_0 \in \Omega$ et $r < d(x_0, \partial\Omega)$, on a

$$u(x_0) \leq \frac{1}{\sigma_{n,r}} \int_{S(x_0,r)} u(x) dS.$$

où $\sigma_{n,r}$ est le volume de $S(0, r)$.

Une fonction u est dite **sous-harmonique** sur Ω si elle est sous-harmonique en tout le point de Ω. L'ensemble des fonctions sous-harmoniques sur Ω est noté par $Sh(\Omega)$

Remarque 2.2.1. On peut changer $S(x_0, r)$ dans la définition par la boule $B(x_0, r)$. Et ces deux définition sont équivalentes.

Théorème 2.2.1 (Principe du Maximum)**.** *Soit Ω un ouvert connexe. Si u est sous-harmonique sur Ω, alors,*

$$\sup_\Omega u = \limsup_{\Omega \ni z \to \partial\Omega \cup \{\infty\}} u(z)$$

et $\sup_K u = \sup_{\partial K} u$ pour chaque sous-ensemble compact $K \subset \Omega$.

Démonstration. Si $\sup_\Omega u > \limsup_{\Omega \ni z \to \partial\Omega \cup \{\infty\}} u(z)$, il existe un point $x_0 \in \Omega$ tel que $\sup_\Omega u = u(x_0)$. On pose que

$$W = \{x \in \Omega | u(x) < u(x_0)\}.$$

Comme u est semi-continue supérieurement, W est ouvert dans Ω. Et W est un sous-ensemble propre de Ω car $x_0 \notin W$.

Si W n'est pas vide, il existe un point adhérent a de W dans $\mathbb{R}^n$ continu dans Ω et $u(a) = u(x_0)$. En plus, il existe un voisinage $B(a, r)$ de a tel que $\Omega \setminus \bar{B}(a, r)$ et $W \cap B(a, r)$ sont non nuls. Mais W est connexe, l'intersection $W \cap S(a, r)$ est un ouvert de $S(a, r)$ non vide aussi. Notons que $u(x) = u(a)$ pour $x \in S(a, r) \setminus W$ et $u(x) < u(a)$ pour $x \in W \cap S(a, r)$, alors $\int_{S(a,r)} u < u(a)$. Contradiction. Donc u est constant sur W. Dans ce cas, on a aussi

$$\sup_\Omega u = \limsup_{\Omega \ni z \to \partial\Omega \cup \{\infty\}} u(z).$$

Contradiction. □

Proposition 2.2.2. *Fonctions sous-harmoniques sont bornées supérieurement sur sous-ensemble compact.*

Démonstration. Si u est sous-harmonique sur un ensemble compact K et n'est pas bornée supérieurement. Alors, il existe un ensemble de points $\{x_j\}$ tels que $u(x_i) \to +\infty$ comme $j \to \infty$. Mais K est compact, alors il existe un sous-ensemble $\{x_{n_j}\}$ tels que $x_{n_j} \to x \in K$ et $u(x_{n_j}) \to +\infty$ comme $n_j \to \infty$. Ce n'est pas possible car u est semi-continue supérieurement. □

Proposition 2.2.3. *Si Ω est connexe et $u \in Sh(\Omega)$, alors soit $u \equiv -\infty$, soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.*

Démonstration. Soit $W = \{x \in \Omega | \int_V u < \infty, V \subset \Omega \ ouvert, x \in V\}$. Alors, W est ouvert dans Ω et u est finie presque partout sur W. Il suffit de montrer que l'adhérence de W dans Ω est W lui-même.

Si $x \in \overline{W}$ un point, on pose que $r = \frac{1}{2}d(x, \partial W)$. On peut choisir un point $x_0 \in W$ tel que $u(x) > -\infty$ et $d(x, x_0) < r$. Par la définition,on a $-\infty < u(x_0) \leq \int_B (x_0, r)$, donc $x \in W$.

Comme Ω est connexe, $W = \Omega$ ou $\Omega = \varnothing$. Dans le cas dernier, $u \equiv -\infty$ par la propriété de sous-moyenne. □

Définition 2.2.3. *Une fonction $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est dite d'être plurisousharmonique (psh pour faire bref) si*

1) u est semi-continue supérieurement ;

2) Pour chaque droite complexe $L \subset \mathbb{C}^n$, $u|_{\Omega \cap L}$ est sous-harmonique sur $\Omega \cap L$.

L'ensemble de fonctions psh sur Ω est noté par $Psh(\Omega)$.

Définition 2.2.4. *Une fonction psh $u \in Psh(X)$ est dite d'avoir singularités analytiques si u peut être localement écrit comme*

$$u = \frac{\alpha}{2} \log(|f_1|^2 + \cdots + |f_N|^2) + v,$$

où $\alpha \in \mathbb{R}_+, v$ est une fonction localement bornée et les f_j sont fonctions holomorphes. Si X est algébrique, on dit que u a singularités algébriques si u peut être écrit comme ci-dessus sur un ouvert de Zariski assez petit, avec $\alpha \in \mathbb{Q}_+$ et f_j algébriques.

Évidemment, chaque fonction $u \in Psh(u)$ est sous-harmonique.

Proposition 2.2.4. *Pour toute suite décroissante de fonctions psh $u_k \in Psh(\Omega)$, la limite $u = \lim u_k$ est psh sur Ω.*

Démonstration. Comme $\{x | u(x) < a\} = \cup_j \{x | u_j(x) < a\}$, alors u est semi-continue supérieurement.

Par le théorème de convergence monotone, on a $\lim_j \int_{S(a,r)} u_j = \int_{S(a,r)} u$. Alors,

$$u(a) = \lim_j u_j(a) \leq \lim_j \int_{S(a,r)} u_j = \int_{S(a,r)} u.$$

Donc u est psh. □

Proposition 2.2.5. *Soient $u_1, \cdots, u_p \in Psh(\Omega)$. Si $\chi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe telle que $\chi(t_1, \cdots, t_p)$ est croissante en chaque t_j, alors $\chi(u_1, \cdots, u_p)$ est psh sur Ω. En particulier, $u_1 + \cdots + u_p$, $\max\{u_1, \cdots, u_p\}$ et $\log(e^{u_1} + \cdots + e^{u_p})$ sont psh sur Ω.*

Afin de terminer cette section, on donne un théorème de Hörmander [Hör07] qui donne une relation entre l'espace de fonctions psh et la topologie. En plus, il est utile dans la preuve du théorème de semi-continuité de Demailly-Kollár qui est l'un des théorèmes principaux dans cette mémoire.

Théorème 2.2.6. *Soit (u_i) une suite de fonctions psh sur un ouvert convexe $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, avec $u_i \not\equiv 0$. On suppose que u_j converge vers une fonctions psh u sur les compacts. Alors, la suite (u_i) est localement majorée sur tout compact de Ω. De plus, pour tout compact $K \subset \Omega$ et toute fonction $f \in C(K)$, on a :*

$$\limsup_{i \to +\infty} \sup_K |u_i - f| \leq \sup_K |u - f|.$$

2.3 Domaine pesudo-convexe

Dans ce paragraphe nous allons étudier une nouvelle classe d'ouvert de $\mathbb{C}^n$, les ouverts pseudo-convexes, qui sont caractérisés par le fait que la fonction-logarithme de la distance au bord est plurisousharmonique.

Théorème 2.3.1. *Si Ω es un domaine d'holomorphie dans $\mathbb{C}^n$, alors*

$$-\log(\mathrm{dist}(z, \partial\Omega))$$

est une fonction plurisousharmonique continue.

On a des autres conditions équivalentes à la condition du Théorème ci-dessus.

Définition 2.3.1. *Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Si K est un sous ensemble compact de Ω, on définit l'enveloppe psh-convexe de K relativement à Ω par*

$$\widehat{K}^p_\Omega = \{z \in \Omega : u(z) \leq \sup_K u, \forall u \in \mathrm{PSH}(\Omega)\}.$$

Puisque $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ implique $|f| \in \mathrm{PSH}(\Omega)$, il est clair que $\widehat{K}^p_\Omega \subset \widehat{K}_\Omega$.

Théorème 2.3.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) $-\log \mathrm{dist}(z, \partial\Omega)$ est plurisousharmonique continue dans Ω.

2) Il existe une fonction u plurisousharmonique continue dans Ω telle que, pour tout $c \in \mathbb{R}$,

$$\Omega_c = \{z \in \Omega : u(z) < c\} \subset] \subset \Omega.$$

3) Si K est un compact de Ω, $\widehat{K}^p_\Omega \subset\subset \Omega$.

Définition 2.3.2. *Un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ est dit pseudoconvexe si l'une des conditions équivalentes du Théorème 2.3.2 est vérifiée.*

Définition 2.3.3. *Une fonction φ continue définie sur un ouvert D de $\mathbb{C}^n$, à valeurs réelles est une fonction d'exhaustion pour D si, pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'ensemble $D_c = \{z \in D : \varphi(z) < c\}$ est relativement compact dans D.*

Remarque 2.3.1. 1) Une fonction d'exhaustion φ vérifie $\varphi(z) \to \infty$ quand z s'approche du bord de D.

2) Un domaine D est donc pseudoconvexe si et seulement s'il admet une fonction d'exhaustion plurisousharmonique continue.

3) Un domaine d'holomorphe est pseudoconvexe.

Nous allons maintenant donner une caractérisation des domaines pseudoconvexes à bord de classe $\mathcal{C}^2$.

Théorème 2.3.3. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ à bord de classe $\mathcal{C}^2$ et ρ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ valeurs réelles définie sur un voisinage $U_{\partial\Omega}$ du bord de Ω telle que $U_{\partial\Omega} \cap \Omega = \{z \in U_{\partial\Omega} : \rho(z) < 0\}$ et $d\rho(z) \neq 0$ pour tout $z \in \partial\Omega$. Alors Ω est pseudoconvexe si et seulement si*

$$L_z(\rho)(w) \geq 0 \quad \text{pour tout } z \in \partial\Omega \text{ et } w \in T_z^{\partial\Omega}$$

où $L_z(\rho)(w) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2\rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) w_j \bar{w}_k$ est la forme de Levi de ρ au point z et $T_z(\partial\Omega)$ l'espace tangent complexe $\{w \in \mathbb{C}^n : \sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(z) w_j = 0\}$.

Définition 2.3.4. *Soient Ω un ouvert relativement compact de $\mathbb{C}^n$ à bord de classe $\mathcal{C}^2$ et ρ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ à valeurs réelles définie sur un voisinage $U_{\partial\Omega}$ du bord de Ω telle que $U_{\partial\Omega} \cap \Omega = \{z \in U_{\partial\Omega} : \rho(z) < 0\}$ et $d\rho(z) \neq 0$ pour tout $z \in \partial\Omega$. On dira que Ω est strictement pseudoconvexe si et seulement si*

$$L_z(\rho)(w) > 0 \quad \text{pour tout } z \in \partial\Omega \text{ et } w \in T_z(\partial\Omega) \setminus \{0\}.$$

Théorème 2.3.4. *Soit $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ un ouvert à bord de classe $\mathcal{C}^2$, strictement pseudoconvexe. Alors il existe un voisinage $U_{\overline{\Omega}}$ de $\overline{\Omega}$ et une fonction $\rho : U_{\overline{\Omega}} \to \mathbb{R}$ strictement plurisousharmonique de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $d\rho(z) \neq 0$ si $z \in \partial\Omega$*

$$\Omega = \{z \in U_{\overline{\Omega}} : \rho(z) < 0\}$$

et

$$\partial\Omega = \{z \in U_{\overline{\Omega}} : \rho(z) = 0\}.$$

2.4 Noyau de Bergman

Avant d'entrer dans les détail, on donne quelques résultats concernant les espaces de Bergman de fonctions L^2 holomorphes définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$.

Définition 2.4.1. *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert, φ une fonction psh sur Ω. On note $A^2(\Omega, \varphi)$ l'espace des fonctions f holomorphes sur Ω de poids L^2 fini, c'est-à-dire que $\int_\Omega |f|^2 e^{-2\varphi} dV_n < +\infty$, où dV_n est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^n$.*

Avant de montrer que $A^2(\Omega, \varphi)$ est un espace de Hilbert, nous montrons un lemme suivant. Ce lemme est simple, mais il est important dans cette section.

Lemme 2.4.1. *Soit $z \in \Omega$ et $0 < r < d(z, \partial\Omega)$. Alors il existe une constante C_r qui dépend seulement que r telle que pour tout $f \in A^2(\Omega, \varphi)$, on a*

$$|f(z)| \leq C_r \|f\|$$

où $\|f\|^2 = \int_\Omega |f|^2 e^{-2\varphi} dV_n$.

Démonstration. Comme φ est localement bornée supérieurement, il existe une constante C telle que $C \leq -\varphi$. Donc

$$\begin{aligned}|f(z)|^2 &\leq |\frac{1}{\sigma_{n,r}} \int_{B(z,r)} f dV_n|^2 \\ &\leq \frac{1}{e^{2C}\sigma_{n,r}} \int_{B(z,r)} |f|^2 e^{-2\varphi} dV_n \\ &\leq C_r^2 \|f\|^2,\end{aligned}$$

où $\sigma_{n,r}$ est le volume de la boule $B(z,r)$ et $C_r^2 = \frac{1}{e^{2C}\sigma_{n,r}}$. □

D'après le lemme ci-dessus, on obtient un corollaire utile.

Corollaire 2.4.2. *Soit $K \subset \Omega$ un sous-ensemble compact. Alors il existe une constante C_K qui dépend que K telle que pour tout $f \in A^2(\Omega, \varphi)$ et $z \in K$, on a*

$$\|f(z)\| \leq C_K \|f\|.$$

Démonstration. Soit $\rho = d(K, \partial\Omega)$ et $r = \frac{\rho}{2}$. D'après le lemme ci-dessus, pour tout $z \in K$, on a $|f(z)| \leq C_r \|f\|$. □

Le résultat suivant est la pierre angulaire de la théorie des espaces de Bergman.

Proposition 2.4.3. *L'espace $A^2(\Omega, \varphi)$ est fermé dans $L^2(\Omega, e^{-2\varphi} dV_n)$, ce qui lui confère une structure d'espace de Hilbert.*

Démonstration. On choisit une suite de Cauchy (f_k) dans $A^2(\Omega, \varphi)$. Soit $K \subset \Omega$ compact. Alors il existe une constante C_K telle que

$$|f_i(z) - f_j(z)| \leq C_K \|f_i - f_j\| < C_k \epsilon,$$

pour tout $z \in K$ et i, j assez grand. Donc (f_k) converge uniformément sur tout compact vers f holomorphe. Par le lemme de Fatou,

$$\int_\Omega \liminf_{j\to\infty} |f_i - f_j|^2 e^{-2\varphi} dV_n \leq \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega |f_i - f_j|^2 e^{-2\varphi} dV_n = \lim_{j\to\infty} \|f_i - f_j\|^2.$$

Alors si i est assez grand, $\int_\Omega |f_i - f|^2 e^{-2\varphi} dV_n < \epsilon$. Donc (f_i) converge vers f pour la norme L^2. On choisit i tel que $\|f_i - f\| < 1$, alors

$$\|f\| \leq \|f_i - f\| + \|f_i\| \leq 1 + \|f_i\| < +\infty.$$

Donc $f \in A^2(\Omega, \varphi)$ et $A^2(\Omega, \varphi)$ est un espace de Hilbert. □

Proposition 2.4.4. *Soit (ψ_k) une base hilbertienne de $A^2(\Omega, \varphi)$. Soit $K \subset \Omega$ compact. Alors il existe une constante M_K telle que pour tout $N > 0$ et $z \in K$, on a*

$$\sum_{k=1}^N |\psi_k|^2 \leq M_K.$$

Démonstration. Pour $z \in K$ fixé, soit $f_z(\zeta) = \sum_{k=1}^N \psi_k(\zeta)\overline{\psi_k(z)}$. Alors

$$\begin{aligned}
\|f_z\|^2 &= \int_\Omega |\sum_{k=1}^N \psi_k(\zeta)\overline{\psi_k(z)}|^2 e^{-2\varphi} dV_n \\
&= \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^N \psi_k(\zeta)\overline{\psi_k(z)}\right)\left(\sum_{\ell=1}^N \overline{\psi_\ell(\zeta)}\psi_\ell(z)\right) e^{-2\varphi} dV_n \\
&= \sum_{k,\ell=1}^N \overline{\psi_k(z)}\psi_\ell(z) \int_\Omega \psi_k(\zeta)\overline{\psi_\ell(\zeta)} e^{-2\varphi} dV_n \\
&= \sum_{k=1}^N |\psi_k(z)|^2.
\end{aligned}$$

Donc $f_z \in A^2(\Omega, \varphi)$. D'après le lemme précédent, pour tout $z \in K$, on a

$$|f_z(z)| \leq M'_K \|f_z\|,$$

c'est-à-dire que

$$\left(\sum_{k=1}^N |\psi_k(z)|^2\right)^2 = |K_z(z)|^2 \leq M'^2_K \|f\|^2 = M'^2_K \sum_{k=1}^N |\psi_k(z)|^2.$$

Donc $\sum_{k=1}^N |\psi_k(z)|^2 \leq M_K$ où $M_K := M'^2_K$. □

D'après la section précédente, $A^2(\Omega, \varphi)$ est un espace de Hilbert. En plus, pour $z \in \Omega$, l'application

$$\begin{aligned}
\mathrm{ev}_z \colon A^2(\Omega, \varphi) &\to \mathbb{C} \\
f &\mapsto f(z)
\end{aligned}$$

est un opérateur linéaire continue. Par le théorème de représentation de Riesz, il existe une fonction $K_z \in A^2(\Omega, \varphi)$ telle que

$$h(z) = \int_\Omega h(\zeta)\overline{K_z(\zeta)} e^{-2\varphi} dV_n$$

Définition 2.4.2. *La fonction K_x est le noyau de Bergman de l'espace $A^2(\Omega, \varphi)$ en point z. La fonction $K(z) := K_z(z)$ est le noyau de Bergman en diagonale.*

Il y a une autre façon de définir le noyau de Bergman. Soit (ψ_k) une base hilbertienne de $A^2(\Omega, \varphi)$.

Proposition 2.4.5. *Avec l'hypothèse ci-dessus,*

$$K_z(\zeta) = \sum_{i,j} \psi_i(\zeta)\overline{\psi_j(z)}$$

et

$$K(z) = \sum_j |\psi_j(z)|^2$$

Démonstration. D'abord, on montre que pour tout $N > 0$, on a

$$\sum_{j=1}^{N} |\psi_j(z)|^2 \leq K(z).$$

Soit $h = \sum_{j=1}^{N} a_j h_j$ avec $\sum_{j=1}^{N} |a_j| \leq 1$. Alors $\|h\| \leq 1$. Donc

$$|h(z)| = |\int_\Omega h(\zeta)\overline{K_z(\zeta)}e^{-2\varphi}dV_n|^2 \leq \|h\|^2\|K_z\|^2 \leq \|K_z\|^2 = K(z).$$

Ce qui conclut la preuve. □

Le théorème suivant donnera la relation des noyaux de Bergman de deux domaines qui sont biholomorphes.

Théorème 2.4.6. *Soient $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}^n$ deux domaines bornés, $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ un biholomorphisme. On note $K_1(z,\eta)$(resp. $K_2(\omega,\xi)$) le noyau de Bergman de Ω_1 (resp. Ω_2). Alors*

$$K_1(z,\eta) = K_2(\omega,\xi) \det f'(z)\overline{\det f'(\eta)},$$

où $\omega = f(z)$ et $\xi = f(\eta)$.

2.5 Variétés de Stein

Dans cette section, nous rappelons la théorie de variétés de Stein. Dans tout le paragraphe X désignera une variété complexe de dimension n.

Définition 2.5.1. *Pour tout compact K de X, on définit*

$$\widehat{K}_X = \{x \in X : |f(x)| \leq \max_{\zeta\in K} |f(x)|, \forall f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)\}.$$

L'ensemble $\widehat{K}_X$ est appelé l'enveloppe holomorphiquement convexe de K dans X. Si $K = \widehat{K}_X$, alors K est dit $\mathcal{O}_X$-convexe.

Définition 2.5.2. *Une variété complexe X est holomorphiquement convexe si pour tout compact K de X, $\widehat{K}_X$ est compact.*

Définition 2.5.3. *Une variété complexe X de dimension n est une variété de Stein si*

1) X est holomorphiquement convexe,

2) Pour toute paire de points distincts $x \neq y$ dans X, il existe une fonction holomorphe $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

3) Pour tout point $x \in X$, il existe des fonctions $f_1, \cdots, f_n \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, telles que dont les différentielles df_j sont $\mathbb{C}$-indépendantes en x.

Une caractérisation importante de variétés de Stein est que elles peuvent être prolongé dans les espaces affines. Plus précisément,

Proposition 2.5.1. *Toute variété de Stein est biholomorphiquement équivalente à une sous-variété complexe d'un certain* $\mathbb{C}^n$.

Exemple 2.5.1. 1) Un ouvert de $\mathbb{C}^n$ est de Stein si et seulement si il est une domaine d'holomorphie.

2) Une variété ne contient pas des sous-variétés complexes compactes de dimension positive.

3) Si X, Y sont de Stein, alors $X \times Y$ est de Stein.

4) Toute sous-variété fermée d'une variété de Stein est une variété de Stein. En particulier toute sous-variété fermée de $\mathbb{C}^n$ est de Stein.

5) Toute surface ouverte de Riemann est une variété de Stein.

6) Si $E \to X$ est un fibré holomorphe ci-dessus au X une variété de Stein, alors E est une variété de Stein.

C'est un fait fondamental que les variétés de Stein sont caractérisé par plurisousharmonicité. La plus effective manière de montrer que une variété complexe est de Stein est de donner une fonction d'exhaustion strictement psh.

Théorème 2.5.2. *Une variété complexe X est de Stein si et seulement si X admet une fonction d'exhaustion φ strictement psh de classe C^2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les ensembles $\{x \in X : \varphi(x) \leq \alpha\}$ sont alors $\mathcal{O}_X$-convexe.*

Les théorèmes A et B de Henri Cartan sont très importants en géométrie analytique et algébrique.

Théorème 2.5.3 (H. Cartan)**.** *Pour tout faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ sur un espace variété $(X, \mathcal{O}_X)$, on a*

1) Le germe $\mathcal{F}_x$ est engendré comme un $\mathcal{O}_{X,x}$-module par les sections globales de $\mathcal{F}$,

2) $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $p \geq 1$.

Maintenant nous donnerons des applications du théorème A et B.

Corollaire 2.5.4 (Théorème d'extension de H. Cartan)**.** *Toute fonction holomorphe sur une variété fermée Y d'une variété de Stein X se prolonge en une fonction holomorphe sur X.*

Démonstration. Considérons la suite courte $0 \to \mathcal{I}_Y \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y \to 0$. Notons que $H^1(X, \mathcal{I}_Y) = 0$, car $\mathcal{I}_Y$ est cohérent par le théorème d'Oka. Donc l'application $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ est surjective. □

Corollaire 2.5.5 (Théorème de division de H. Cartan)**.** *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur une variété de Stein X. Si $f_1, \cdots, f_k \in \mathcal{F}(X)$ engendre tout germe $\mathcal{F}_x$, alors tout $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est de la forme $f = \sum_{j=1}^k g_j f_j$ pour des $g_j \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.*

Théorème 2.5.6. *Soit X une variété de Stein. Alors le groupe de cohomologie de Dolbeault*

$$H^{p,q}_{\bar{\partial}}(X) = 0$$

s'annule pour tout $p \geq 0$ et $q \geq 1$.

Démonstration. Le faisceau Ω^p de p-formes holomorphes sur X admet une résolution

$$0 \to \Omega^p \to \mathcal{A}^{p,0} \to \mathcal{A}^{p,1} \to \mathcal{A}^{p,2} \to \cdots \to \mathcal{A}^{p,n} \to 0.$$

Comme les faisceaux $\mathcal{A}^{p,q}$ de $((p,q))$-formes lisses sur X sont des faisceaux fins, donc les cohomologies s'annulent. Donc $H^{p,q}_{\bar{\partial}}(X) \cong H^q(X, \Omega^p)$. Comme Ω^p est un faisceau analytique cohérent, ces groupes sont zéro. □

Dans le lemme suivant, nous allons montrer un résultat d'approximation pour fonctions holomorphes sur variétés de Stein.

Lemme 2.5.7. *Soit X une variété de Stein. Soit ρ une fonction strictement psh de classe C^∞ sur X. Posons*

$$\Omega := \{z \in X : \rho(z) < 0\}$$

et supposons que $d\rho \neq 0$ sur $\partial\Omega$. Soient dV une forme volume sur X et f une fonction holomorphe sur Ω telle que

$$\int_\Omega |f|^2 dV < \infty.$$

Alors il existe une suite de fonctions holomorphes f_j sur X telle que

$$\lim_{t\to\infty} \int_\Omega |f - f_j|^2 dV = 0.$$

Avant de clore cette section, on donne un théorème fondamental pour variétés de Stein.

Théorème 2.5.8. *Soit X une variété de Stein et soit $L \to X$ un fibré en droites holomorphe. Alors L possède une section holomorphe globale non nulle.*

Chapitre 3

La Théorie L^2

3.1 Théorème de Hörmander

Dans cette section, nous allons montrer le théorème de Hörmander de la résolution de la $\bar{\partial}$-équation avec estimations L^2. Au lieu d'utiliser les identités de Kähler et la formule de Kodaira-Nakano, nous allons ici suivre la présentation de B. Berndtsson dans [MM10] en utilisant la méthode de $\partial\bar{\partial}$-Bochner-Kodaira introduit par Siu.

3.1.1 Analyse fonctionnelle

Soient H_1 et H_2 espaces de Hilbert. Les applications linéaires entre H_1 et H_2 sont dites opérateurs linéaires ou opérateurs.

Remarque 3.1.1. 1) $Dom(T)$ est le domaine de définition de T.
2) $T : Dom(T) \to H_2$ n'est pas forcément continue.
3) Le graphe de T est donné par

$$\Gamma(T) := \{(x, Tx) : x \in Dom(T)\} \subset H_1 \times H_2.$$

Définition 3.1.1. *Un opérateur $T : H_1 \to H_2$ est dit être*
1) densément défini si $Dom(T)$ est un sous-espace dense de H_1,
2) fermé si le graphe $\Gamma(T)$ est un sous-espace fermé de $H_1 \times H_2$.

Maintenant, nous allons définir l'opérateur adjoint $T^* : H_2 \to H_1$ d'un opérateur densément défini $T : H_1 \to H_2$. On commence en supposant que $Dom(T^*)$ contient tous $\eta \in H_2$ tel que

$$L_\eta : \xi \mapsto \langle T\xi, \eta\rangle_2$$

est une fonctionnelle linéaire continue sur $Dom(T)$. Comme $Dom(T)$ est dense dans H_1,il existe une extension de L_η sur H_1. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un élément unique $T^*\eta$ de H_1 tel que

$$\langle T\xi, \eta\rangle_2 = \langle \xi, T^*\eta\rangle_1, \ \xi \in Dom(T).$$

Évidemment, T^* est linéaire.

Proposition 3.1.1. *Soit $T : H_1 \to H_2$ un opérateur densément défini et fermé entre espaces de Hilbert. Alors $T^* : H_2 \to H_1$ est un opérateur densément défini et fermé.*

Démonstration. Supposons que $F : H_1 \times H_2 \to H_2 \times H_1$ [1] est donnée par

$$F(\xi, \eta) = (-\eta, \xi).$$

Notons que $(\eta, \xi) \perp F(\Gamma(T))$ si et seulement si

$$\langle x, \xi \rangle_1 = \langle Tx, \eta \rangle_2$$

pour tout $x \in Dom(T)$. Alors, on a

$$F(\Gamma(T)^\perp) = F(\Gamma(T))^\perp = \Gamma(T^*)$$

et T^* est fermé. Maintenant supposons que $\eta \in Dom(T^*)$. Alors,

$$(\eta, 0) \in \Gamma(T^*)^\perp = F(\Gamma(T)^{\perp\perp}) = F(\overline{\Gamma(T)}) = F(\Gamma(T)).$$

Donc $\eta = T(0) = 0$, c'est-à-dire T^* est densément défini. □

Proposition 3.1.2. *Si T est un opérateur fermé et densément défini, alors $T^{**} = T$.*

Démonstration. Supposons que $G : H_2 \times H_1 \to H_1 \times H_2$ est donnée par

$$G(\eta, \xi) = (-\xi, \eta).$$

D'après la proposition ci-dessus, T^* est fermé et densément défini. En plus,

$$\Gamma(T^{**}) = G(\Gamma(T^*))^\perp = G(F(\Gamma(T)))^{\perp\perp} = \Gamma(T)^{\perp\perp} = \overline{\Gamma(T)} = \Gamma(T).$$

et donc $T^{**} = T$. □

Maintenant, supposons que nous avons un opérateur fermé et densément défini $T : H_1 \to H_2$ entre espaces de Hilbert. Pour $\alpha \in H_2$ fixé, nous allons donner une condition qui garantit l'existence de la résolution de l'équation $Tu = \alpha$. En plus, nous voudrai trouver une résolution u avec estimations pour $|u|$ par $|\alpha|$.

Lemme 3.1.3 (Lemme d'analyse fonctionelle)**.** *Soit $T : H_1 \to H_2$ un opérateur fermé et densément défini. Soit $\alpha \in H_2$, supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$|\langle \alpha, \beta \rangle_2|^2 \leq C \|T^* \beta\|^2$$

pour tout $\beta \in Dom(T^*)$. Alors il existe $u \in H_1$ tel que

$$Tu = \alpha \quad \text{et} \quad \|u\|^2 \leq C.$$

1. $H_1 \times H_2$ devient un espace de Hilbert en definissant $\langle (x, y), (x', y') \rangle = \langle x, x' \rangle_1 + \langle y, y' \rangle_2$.

Démonstration. Considérons l'application antilinéaire

$$L(T^*\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle_2.$$

Par l'hypothèse, si $T^*(\beta) = 0$, alors $\langle \alpha, \beta \rangle_2 = 0$ et L est bien définie. En plus, L est continue sur le sous-espace $\mathrm{Im}(T^*) \subset H_1$. Par le théorème de Hahn-Banach, L peut se prolonger une fonctionnelle antilinéaire sur H_1. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe $u \in H_1$ telle que

$$Lv = \langle u, v \rangle_1 \text{ and } \|u\|^2 \leq C.$$

Alors, on a

$$\langle u, T^*\beta \rangle_1 = \langle \alpha, \beta \rangle_2$$

pour tout $\beta \in Dom(T^*)$. Comme $T^{**} = T$ et $Dom(T^*)$ est dense, on a $Tu = \alpha$. □

3.1.2 Opérateurs différentielles

Soient X une variété complexe et $L \to X$ un fibré en droites holomorphe avec une métrique e^k. Soit φ une (p, q)-forme à valeur dans L. Localement, on peut écrire

$$\varphi = \varphi_{I\bar{J}} \xi \otimes dz^I \wedge d\bar{z}^J.$$

Supposons que $g = (g_{i\bar{j}})$ est une métrique sur X et $(g^{i\bar{j}})$ est l'inverse de g. Alors, la quantité

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{k,g} := \varphi_{I\bar{J}} \overline{\psi_{K\bar{L}}} e^{-k} g^{i_1\bar{k}_1} \cdots g^{i_p\bar{k}_p} g^{\ell_1\bar{j}_1} \cdots g^{\ell_p\bar{j}_q}$$

est indépendante au choix de coordonnées locales et trivialisations locales de H

Remarque 3.1.2. Par la suite, nous allons utiliser les notions

$$g^{J\bar{L}} := g^{j_1\bar{\ell}_1} \cdots g^{j_q\bar{\ell}_q} \quad \textit{and} \quad \psi^{J\bar{I}} := \psi_{K\bar{L}} g^{K\bar{I}} g^{J\bar{L}}.$$

Dans ce cas, on a $\langle \varphi, \psi \rangle = \varphi_{I\bar{J}} \overline{\psi^{J\bar{I}}} e^{-k}$.

Définition 3.1.2. *Soit dV une forme volume de X.*

1) Pour $\varphi, \psi \in \mathcal{A}^{p,q}(L)$ à support compact, on définit le produit scalaire

$$(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi)_{k,g,dV} = \int_X \langle \varphi, \psi \rangle_{k,g} dV.$$

Alors, l'espace de (p, q)-formes lisses à support compact à valeur dans L est un espace préhilbertien, noté par $\mathcal{A}_c^{p,q}(L)$.

2) On pose $L^2_{p,q}(k, g, dV)$ la complétion de $\mathcal{A}_c^{p,q}(L)$. Alors $L^2_{p,q}(k, g, dV)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{k,g,dV}$.

3) Si la forme volume est $dV_\omega := \frac{\omega_g^n}{n!}$ où ω_g est la forme Kählérienne de g, alors on écrira

$$L^2_{p,q}(k, g, dV_\omega) = L^2_{p,q}(k, g).$$

Définition 3.1.3. *Soit $T : L^2_{p,q}(k,g,dV) \to L^2_{p',q'}(k',g',dV')$ un opérateur densément défini dont le domaine contient le sous-espace $\mathcal{A}^{p,q}_c(L)$. L'adjoint formel de T est un opérateur*

$$T^* : L^2_{p',q'}(k',g',dV') \to L^2_{p,q}(k,g,dV)$$

vérifié

$$(T\varphi,\psi)' = (\varphi, T^*\psi)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{A}^{p,q}_c(L)$ et $\psi \in \mathcal{A}^{p,q}_c(L')$.

Remarque 3.1.3. Comme $\mathcal{A}^{p,q}_c(L)$ est dense dans $L^2_{p,q}(k,g,dV)$, alors l'adjoint formel est unique.

Soient $\varphi = \varphi_i \otimes e_i$ et $\psi = \psi_i \otimes e_i$. Alors on définit

$$\varphi \wedge \bar{\psi} e^{-k} := \varphi_i \wedge \bar{\psi}_i e^{-k_i}.$$

Notons que

$$\varphi_i = g_{ij}\varphi_j \text{ et } \log|g_{ij}|^2 = k_i - k_j,$$

donc $\varphi \wedge \bar{\psi} e^{-k}$ est bien définie.

Lemme 3.1.4. *Soit $\psi \in \Gamma(\mathcal{A}^{n,q}(L))$ une (n,q)-forme. Alors il existe une unique $(n-q,0)$-forme γ_φ telle que*

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{k,g} dV_\omega = c_{n-q}\varphi \wedge \bar{\gamma}_\psi e^{-k},$$

pour tout $\varphi \in \Gamma(\mathcal{A}^{n,q}(L))$ et $c_{n-q} = i^{(n-q)^2}$.

Remarque 3.1.4. Une autre formule utile pour γ_ψ est $\psi = \gamma_\psi \wedge \omega_q$.

Comme L est un fibré holomorphe, on peut aussi définir le $\bar{\partial}$-opérateur pour les sections de L : soit $\varphi = \varphi_i \otimes e_i$, alors

$$\bar{\partial}\varphi = \bar{\partial}\varphi_i \otimes e_i.$$

En particulier, $\bar{\partial} : L^2_{n,q}(k,g,dV_\omega) \to L^2_{n,q+1}(k,g,dV_\omega)$ est densément défini [2].

L'adjoint formel $\bar{\partial}^*$ de $\bar{\partial}$ doit vérifier

$$\int \langle \bar{\partial}\varphi, \psi \rangle_{k,g} dV_\omega = \int \langle \varphi, \bar{\partial}^*\psi \rangle dV_\omega$$

pour tout $\varphi \in \Gamma(\mathcal{A}^{n,q-1}(L))$ à support compact.

D'après le lemme ci-dessus,

$$\int \langle \bar{\partial}\varphi, \psi \rangle_{k,g} dV_\omega = c_{n-q} \int \bar{\partial}\varphi \wedge \bar{\gamma}_\psi e^{-k}.$$

Maintenant, on définit un opérateur différentiel de degré $(1,0)$ sur les formes à valeur dans L par

$$\delta\varphi = e^{k_i}\partial(e^{-k_i}\varphi_i) \otimes e_i.$$

2. Si k, g et dV_ω sont claires, nous allons utiliser $L^2_{p,q}(X,L,k)$ au lieu de $L^2_{n,q}(k,g,dV_\omega)$.

Proposition 3.1.5. *δ est bien défini et vérifie*

$$\bar{\partial}(\varphi \wedge \psi)e^{-k} = \bar{\partial}\varphi \wedge \bar{\psi}e^{-k} + (-1)^{\deg \varphi}\varphi \wedge \overline{\delta\psi}e^{-k}.$$

Démonstration. Il suffit de montrer l'identité dans la proposition, car $\bar{\partial}$ est bien défini.

$$\begin{aligned}\bar{\partial}(\varphi \wedge \bar{\psi}e^{-k}) &= \bar{\partial}\varphi \wedge \bar{\psi}e^{-k} + (-1)^{\deg \varphi}\varphi \wedge \bar{\partial}(\bar{\psi}e^{-k}) \\ &= \bar{\partial}\varphi \wedge \bar{\psi}e^{-k} + (-1)^{\deg \varphi}\varphi \wedge \overline{\delta\psi}e^{-k}.\end{aligned}$$

□

Remarque 3.1.5. On peut aussi montrer que δ est bien défini directement.

$$\begin{aligned}e^{k_i}\partial(e^{-k_i}\varphi_i) \otimes e_i &= (-\partial k_i\varphi_i + \partial\varphi_i) \otimes e_i \\ &= ((-\partial k_j - \frac{\partial g_{ij}}{g_{ij}})g_{ij}\varphi_j + \partial g_{ij}\varphi_j + g_{ij}\partial\varphi_j) \otimes e_j \\ &= (-\partial k_j\varphi_j + \partial\varphi_j)g_{ij} \otimes e_j\end{aligned}$$

Proposition 3.1.6. *Soit D la connexion de Chern sur L. Alors*

$$D = \delta + \bar{\partial}.$$

En particulier,

$$D^2 = \delta\bar{\partial} + \bar{\partial}\delta = -\bar{\partial}\partial k = c(k).$$

Par le théorème de Stokes et la proposition ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}c_{n-q}\int \bar{\partial}\varphi \wedge \bar{\gamma}_\psi e^{-k} &= c_{n-q}\int \bar{\partial}(\varphi \wedge \bar{\gamma}_\psi e^{-k}) + c_{n-q}(-1)^{n+q}\int \varphi \wedge \overline{\delta\gamma_\psi}e^{-k} \\ &= c_{n-q}(-1)^{n+q}\int \varphi \wedge \overline{\delta\gamma_\psi}e^{-k}\end{aligned}$$

car $\partial u = 0$ pour une $(n, n-1)$-forme u. En plus,

$$\int \langle \varphi, \bar{\partial}^*\psi \rangle dV_\omega = c_{n-q+1}\int \varphi \wedge \overline{\gamma_{\bar{\partial}^*\psi}}e^{-k}$$

Comme $c_{n-q+1} = i(-1)^{n-q}c_{n-q}$, on obtient le théorème suivant.

Théorème 3.1.7. $\gamma_{\bar{\partial}^*\psi} = i\delta\gamma_\psi$.

Remarque 3.1.6. Soit $\alpha \in \Gamma(\mathcal{A}^{n,q}(L))$. On définit

$$T_\alpha := c_{n-q}\gamma_\alpha \wedge \bar{\gamma}_\alpha \wedge \omega_{q-1}e^{-k},$$

où $c_{n-q} = i^{(n-q)^2}$ est une constante unimodulaire telle que $T_\alpha \geq 0$.

Avant donner l'identité basique pour l'adjoint formel $\bar{\partial}^*$, on montre un lemme.

Lemme 3.1.8. *Soit $\psi \in \Gamma(\mathcal{A}^{n-q,1}(L))$. Alors*

$$ic_{n-q}(-1)^{n-q-1}\psi \wedge \bar{\psi} \wedge \omega_{q-1} = (\|\psi\|^2 - \|\psi \wedge \omega_q\|^2)dV_\omega.$$

Démonstration. Pour un point x fixé, on peut choisir une base orthonormale $\{dz_j\}$ de T^*_X en x. Écrions

$$\psi = \sum \psi_{Jk} dz_J \wedge d\bar{z}_k.$$

Alors, on a

$$ic_{n-q}(-1)^{n-q-1}\psi \wedge \bar{\psi} \wedge \omega_{q-1} = \sum_{k \notin J} \psi_{Jk}\bar{\psi}_{Jk} dV_\omega.$$

D'ailleurs, on a

$$\|\psi \wedge \omega\|^2 = \sum_{k \in J} \psi_{Jk}\bar{\psi}_{Jk}.$$

Donc on obtient l'identité dans le lemme. □

Proposition 3.1.9. *Soit $\alpha \in \Gamma(\mathcal{A}^{n,q}(L))$. Si ω est Kählérienne, on obtient*

$$i\partial\bar{\partial}T_\alpha = (-2\mathrm{Re}\langle\bar{\partial}\bar{\partial}^*\alpha, \alpha\rangle + \|\bar{\partial}\gamma_\alpha\|^2 + \|\bar{\partial}^*\alpha\|^2 - \|\bar{\partial}\alpha\|^2)dV_\omega + ic(k) \wedge T_\alpha,$$

et, si α est à support compact,

$$\int ic(k) \wedge T_\alpha + \int \|\bar{\partial}\gamma_\alpha\|^2 dV_\omega = \int \|\bar{\partial}\alpha\|^2 + \|\bar{\partial}^*\alpha\|^2.$$

Démonstration. Notons que ω est Kählérienne, donc

$$d\omega = \partial\omega = \bar{\partial}\omega = 0 \text{ et } \bar{\partial}\gamma_\alpha \wedge \omega_q = \bar{\partial}\alpha.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
i\partial\bar{\partial}T_\alpha &= ic_{n-q}\partial(\bar{\partial}(\gamma_\alpha \wedge \bar{\gamma}_\alpha \wedge \omega_{q-1}e^{-k})) \\
&= ic_{n-q}\partial(\bar{\partial}\gamma_\alpha \wedge \bar{\gamma}_\alpha \wedge \omega_{q-1}e^{-k} + (-1)^{n-q}\gamma_\alpha \wedge \overline{\delta\gamma_\alpha} \wedge \omega_{q-1}e^{-k}) \\
&= ic_{n-q}(\delta\bar{\partial}\gamma_\alpha \wedge \bar{\gamma}_\alpha \wedge \omega_{q-1}e^{-k} + (-1)^{n-q+1}\bar{\partial}\gamma_\alpha \wedge \partial\bar{\gamma}_\alpha \wedge \omega_{q-1}e^{-k} \\
&\quad + (-1)^{n-q}\delta\gamma_\alpha \wedge \overline{\delta\gamma_\alpha} \wedge \omega_{q-1}e^{-k} + \gamma_\alpha \wedge \overline{\bar{\partial}\delta\gamma_\alpha} \wedge \omega_{q-1}e^{-k}) \\
&= ic_{n-q}((c(k) - \bar{\partial}\delta)\gamma_\alpha \wedge \bar{\gamma}_\alpha \wedge \omega_{q-1}e^{-k} + (-1)^{n-q+1}\bar{\partial}\gamma_\alpha \wedge \partial\bar{\gamma}_\alpha \wedge \omega_{q-1}e^{-k} \\
&\quad + (-1)^{n-q}\delta\gamma_\alpha \wedge \overline{\delta\gamma_\alpha} \wedge \omega_{q-1}e^{-k} + \gamma_\alpha \wedge \overline{\bar{\partial}\delta\gamma_\alpha} \wedge \omega_{q-1}e^{-k}) \\
&= ic(k) \wedge T_\alpha + ic_{n-q}(i\bar{\partial}\gamma_{\bar{\partial}^*\alpha} \wedge \bar{\gamma}_\alpha \wedge \omega_{q-1} + (-1)^{n-q+1}\bar{\partial}\gamma_\alpha \wedge \partial\bar{\gamma}_\alpha \wedge \omega_{q-1} \\
&\quad + (-1)^{n-q}\delta\gamma_\alpha \wedge \overline{\delta\gamma_\alpha} \wedge \omega_{q-1} + i\gamma_\alpha \wedge \overline{\bar{\partial}\gamma_{\bar{\partial}^*\alpha}} \wedge \omega_{q-1})e^{-k} \\
&= ic(k) \wedge T_\alpha + ic_{n-q}(i\bar{\partial}\bar{\partial}^*\alpha \wedge \bar{\gamma}_\alpha + (-1)^{n-q+1}\bar{\partial}\gamma_\alpha \wedge \partial\bar{\gamma}_\alpha \wedge \omega_{q-1} \\
&\quad + (-1)^{n-q}\delta\gamma_\alpha \wedge \overline{\delta\gamma_\alpha} \wedge \omega_{q-1} + i\gamma_\alpha \wedge \overline{\bar{\partial}\bar{\partial}^*\alpha})e^{-k} \\
&= ic(k) \wedge T_\alpha - 2\mathrm{Re}\langle\bar{\partial}\bar{\partial}^*\alpha, \alpha\rangle dV_\omega + ic_{n-q}((-1)^{n-q+1}\bar{\partial}\gamma_\alpha \wedge \partial\bar{\gamma}_\alpha \wedge \omega_{q-1} \\
&\quad + (-1)^{n-q}\delta\gamma_\alpha \wedge \overline{\delta\gamma_\alpha} \wedge \omega_{q-1})e^{-k}
\end{aligned}$$

Ici on utilise l'identité $\delta\bar\partial + \bar\partial\delta = c(k)$. En plus,

$$\begin{aligned} ic_{n-q}(-1)^{n-q}\delta\gamma_\alpha \wedge \overline{\delta\gamma_\alpha} \wedge \omega_{q-1}e^{-k} &= ic_{n-q}(-1)^{n-q}\gamma_{\bar\partial^*\alpha} \wedge \overline{\gamma_{\bar\partial^*\alpha}} \wedge \omega_{q-1}e^{-k} \\ &= ic_{n-q}(-1)^{n-q}\bar\partial^*\alpha \wedge \overline{\gamma_{\bar\partial^*\alpha}}e^{-k} \\ &= c_{n-q+1}\bar\partial^*\alpha \wedge \overline{\gamma_{\bar\partial^*\alpha}}e^{-k} \\ &= \|\bar\partial^*\alpha\|^2 dV_\omega \end{aligned}$$

D'ailleurs, par le lemme ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} ic_{n-q}(-1)^{n+q-1}\bar\partial\gamma_\alpha \wedge \partial\bar\gamma_\alpha \wedge \omega_{q-1} &= (\|\bar\partial\gamma_\alpha\|^2 - \|\bar\partial\gamma_\alpha \wedge \omega_q\|^2)dV_\omega \\ &= (\|\bar\partial\gamma_\alpha\|^2 - \|\bar\partial\alpha\|^2)dV_\omega \end{aligned}$$

Alors on obtient l'identité dans la proposition. Si α est à support compact, on a

$$\int \langle \bar\partial\bar\partial^*\alpha, \alpha\rangle dV_\omega = \int \|\bar\partial^*\alpha\|^2.$$

D'après le théorème de Stokes, $\int i\partial\bar\partial T_\alpha = 0$. Donc

$$\int ic(k) \wedge T_\alpha + \int \|\bar\partial\gamma_\alpha\|^2 dV_\omega = \int \|\bar\partial\alpha\|^2 + \|\bar\partial^*\alpha\|^2.$$

□

Corollaire 3.1.10. *Supposons que la courbure de la métrique k est strictement positive telle que*

$$ic(k) \geq c\omega$$

pour certaine constante positive c. Alors

$$qc\int \|\alpha\|^2 dV_\omega + \int \|\bar\partial\gamma_\alpha\|^2 dV_\omega \leq \int \|\bar\partial\alpha\|^2 + \|\bar\partial^*\alpha\|^2.$$

Démonstration. Comme $ic(k) \geq c\omega$, on a

$$ic(k) \wedge T_\alpha \geq cT_\alpha \wedge \omega = qcc_{n-q}\gamma_\alpha \wedge \bar\gamma_\alpha \wedge \omega_q e^{-k} = qc\|\alpha\|^2 dV_\omega.$$

□

3.1.3 Théorème d'existence

Dans cette section, nous allons montrer le théorème d'existence pour la $\bar\partial$-équation pour fibrés en droite positifs sur variétés kähleriennes complètes.

Définition 3.1.4. *Une variété complexe X muni d'une métrique hermitienne est complète s'il existe une fonction propre*

$$\chi : X \to [0, \infty)$$

vérifié

$$\|d\chi\| \leq C.$$

Théorème 3.1.11. *Soit L un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique ϕ sur une variété complexe X qui possède une métrique kählérienne complète. Supposons que la métrique ϕ a une courbure strictement positive et*

$$ic(\phi) \geq c\omega$$

où $c(\phi) = \partial\bar{\partial}\phi$ est la courbure de ϕ et ω est la forme kählérienne sur X.

Soit $f \in \mathcal{A}^{n,q}(L)(q > 0)$ vérifié $\bar{\partial} f = 0$. Alors il existe $u \in \mathcal{A}^{n,q-1}(L)$ telle que

$$\bar{\partial} u = f$$

et

$$\|u\|^2 \leq \frac{1}{qc}\|f\|^2,$$

lorsque la quantité du côté droite est finie.

Considérons les deux espaces de Hilbert

$$H_1 = L^2_{n,q-1}(X, L, k)$$

et

$$H_2 = L^2_{n,q}(X, L, k)$$

de formes à valeur dans L. Alors $T = \bar{\partial} : H_1 \to H_2$ est un opérateur fermé et densément défini. En plus, soient $H_3 = L^2_{n,q+1}(X, L, k)$ et $\bar{\partial}' : H_2 \to H_3$. C'est claire que l'image $\mathrm{Im}(\bar{\partial}) \subset \ker \bar{\partial}'$. Donc $\bar{\partial} : H_2 \to \overline{\ker \bar{\partial}'} = \ker \bar{\partial}'$ est un opérateur entre espaces de Hilbert. D'après le lemme d'analyse fonctionnelle, pour montrer le théorème d'existence, il suffit de montrer l'inégalité suivante.

$$cq\|\alpha\|^2 \leq \|T^*\alpha\|^2$$

pour tout $\alpha \in \ker \bar{\partial}' \cap Dom(T^*)$. On a déjà montré cette inégalité pour les formes lisses à supports compacts. D'abord, on suppose que la métrique ω est complète. Dans ce cas, le théorème est un corollaire direct du lemme suivant.

Lemme 3.1.12 ([Dem12b], Théorème 3.2)**.** *Soit (X, g) une variété complète, et E un fibré vectoriel hermitien sur X muni d'une connexion D. Si δ est l'adjoint formel de D, alors l'espace $\mathcal{A}_c(X, \Lambda^\bullet T^*_X \otimes E)$ des sections C^∞ à support compact est dense dans $Dom(D)$, $Dom(\delta)$ et $Dom(D) \cap Dom(\delta)$ respectivement pour les normes des graphes :*

$$u \mapsto \|u\| + \|Du\|, \quad u \mapsto \|u\| + \|\delta u\|, \quad u \mapsto \|u\| + \|Du\| + \|\delta u\|.$$

Pour le cas général, on suppose qu'il y a une métrique kählérienne complète ω' sur X. Pour simplifier, on aussi suppose que la métrique est de la forme

$$\omega' = i\partial\bar{\partial}\psi$$

où ψ est une fonction psh strictement. Soit

$$\omega_k = \omega + \frac{\omega'}{k}.$$

Toutes les métriques ω_k sont complètes, et si

$$\kappa_k = \kappa + c\frac{\psi}{k},$$

alors $ic(\kappa_k) \geq c\omega_k$. Par le cas précédent, il y a une résolution φ_k de $\bar{\partial}\varphi_k = f$ telle que

$$cq\|\varphi\|_k^2 \leq \|f\|_k^2,$$

où $\|\cdot\|_k$ est la norme associée à la métrique ω_k sur X et κ_k sur L.

Lemme 3.1.13. *Soit $\omega_1 \leq \omega_2$ deux formes kählériennes. Soit $\|\cdot\|_{1,2}$ les normes correspondantes. Alors si f est une (n,q)-forme,*

$$\|f\|_2^2 dV_{\omega_2} \leq \|f\|_1^2 dV_{\omega_1}.$$

D'après le lemme ci-dessus, on obtient

$$\|f\|_k^2 \leq \|f\|^2,$$

donc si la quantité à droit est finie, on a une borne uniforme pour toutes les normes associées à ω_k. Donc $\{u_k\}$ est une famille normale, en extrayant une sous-suite convergeant faiblement sur les compact, on conclut la preuve.

3.2 Courbure de fibrés vectriels associés à fibrations holomorphes

Considérons un domaine $D = U \times \Omega$ dans $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$ et une fonction psh ϕ sur D. Nous supposons que ϕ est lisse au voisinage de l'adhérence de D et strictement psh sur D. Alors $\phi^t(\cdot) := \phi(t,\cdot)$ est une fonction psh sur Ω pour chaque $t \in U$. A_t^2 est noté les espaces de Bergman de fonction holomorphes dans Ω avec norme

$$\|h\|^2 = \|h\|_t^2 = \int_\Omega |h|^2 e^{-2\phi^t}.$$

Alors les espaces A_t^2 sont égales comme espaces vectoriels. Le fibré vectoriel F (de rang infini) sur U à fibre $F_t = A_t^2$ est un fibré trivial muni d'une métrique non triviale.

Théorème 3.2.1. *Le fibré hermitienne $(F, \|\cdot\|_t)$ est strictement positif au sens de Nakano.*

3.2.1 Courbure de fibrés vectoriels de dimension finie ou infinie

D'abord, nous rappelons quelque définitions de courbures de fibrés de rang fini ou infini.

Définition 3.2.1. *Soient $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}$ deux espaces complexes de Hilbert, U un ouvert de $\boldsymbol{E}$. on dira que une application $f : U \to \boldsymbol{F}$ est une application holomorphe sur U s'il vérifie l'une de conditions suivantes :*

1) Pour tout $a \in U$, il existe une application linéaire continue $A \in B(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ telle que

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - A(x-a)\|_{\boldsymbol{F}}}{\|x - a\|_{\boldsymbol{E}}} = 0.$$

2) Pour tout $a \in U$, il existe une suite $\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-a)$ qui converge uniformément vers f sur certaine boule $B(a,r) \subset U$.

3) f est continue et, pour tout $a \in U$, $b \in \boldsymbol{E}$ et $\lambda \in \boldsymbol{F}^*$, la fonction $z \mapsto \lambda \circ f(a+\lambda b)$ est holomorphe au sens usuel sur l'ouvert $\{z \in \mathbb{C} : a + \lambda b \in U\}$.

Comme le cas de dimension fini, maintenant on peut aussi définir les variétés complexe de dimension infinie. En particulier, on peut considérer les fibrés vectoriels de dimension infinie sur une variété complexe de dimension finie.

Définition 3.2.2. *Soient E, X variétés complexes, $p : E \to X$ une application holomorphe. On dira que E est un fibré holomorphe sur X, s'il existe une espace vectoriel $\boldsymbol{E}$ telle que pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U_x tel que $p^{-1}(U_x)$ est isomorphe à $U_x \times \boldsymbol{E}$.*

On considère l'espace vectoriel $L^2_{\text{anti}}(\mathbf{E})$ des formes bilinéaires continues

$$\lambda : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbb{C}$$

qui sont antisymétriques. Alors on obtient un autre fibré vectoriel holomorphe $L^2_{\text{anti}}(E) \to X$.

Définition 3.2.3. *Une métrique hermitienne de E est une section lisse h de $L^2_{anti(E)}$ qui est non dégénérée sur chaque fibre E_x et vérifie*

$$h_x(\mu e_1, \lambda e_2) = \mu\bar{\lambda} h_x(e_1, e_2)$$

pour tout $x \in X$, $e_1, e_2 \in E_x$ et $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$.

Soit $(t_1, \cdots, t_n)$ un système de coordonnées sur X. Alors la connexion de Chern D_{t_j} est donnée par

$$\partial_{t_j} h(u,v) = h(D_{t_j}u, v) + h(u, \bar{\partial}_{t_j} v),$$

où u et v sont des sections locales lisses de E. La courbure de la connexion de Chern est une $(1,1)$-forme d'opérateurs

$$\Omega = \sum \Omega_{jk} dt_j \wedge d\bar{t}_k,$$

où les coefficients Ω_{jk} sont donnés par

$$\Omega_{jk} = \left[D_{t_j}, \bar{\partial}_{t_k}\right].$$

Définition 3.2.4. *Soit $E \to X$ un fibré vectoriel holomorphe sur une variété complexe X de dimension n.*

1) E est dit positif au sens de Griffiths si pour tout $x \in X$, on a

$$\sum h_x(\Omega_{jk} u, u) v_j \bar{v}_k > 0,$$

pour tout $0 \neq u \in \boldsymbol{E}$ et $0 \neq v = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbb{C}^n$.

2) E est dit positif au sens de Nakano si pour $x \in X$, on a

$$\sum h_x(\Omega_{jk} u_j, u_k) > 0,$$

pour tout n-uplet $0 \neq (u_1, \cdots, u_n)$ avec $u_i \in \boldsymbol{E}$.

En prenant $u_j = uv_j$, on voit que la positivité de Nakano implique la positivité de Griffiths. Soient E^* le fibré dual de E au dessus de X, et D^* la connexion de Chern sur E^*. Si ξ est une section locale de E^* et u est une section locale de E, on a

$$\bar{\partial}_{t_j}\langle \xi, u\rangle = \langle \bar{\partial}_{t_j}\xi, u\rangle + \langle \xi, \bar{\partial}_{t_j} u\rangle,$$

et

$$\partial_{t_j}\langle \xi, u\rangle = \langle D^*_{t_j}\xi, u\rangle + \langle \xi, D_{t_j} u\rangle.$$

Donc

$$0 = \left[\partial_{t_j}, \bar{\partial}_{t_k}\right]\langle \xi, u\rangle = \langle \Omega^*_{jk}\xi, u\rangle + \langle \xi, \Omega_{jk} u\rangle,$$

où Ω^* est la courbure de E^*. En plus, il y a une isométrie antilinéaire naturelle J entre E et E^* telle que

$$\langle \xi, u\rangle = h(u, J\xi).$$

Si $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ est un n-uplet avec $\xi_i \in E^*_x$ et $u_j = J\xi_j$, on donc obtient

$$\sum h(\Omega^*_{jk}\xi_j, \xi_k) = -\sum h(\Omega_{jk} u_k, u_j).$$

Alors, exactement, on a montré la proposition suivante.

Proposition 3.2.2. *E est positif au sens de Griffiths si et seulement si E^* est négatif au sens de Griffiths.*

On donnera la formule de Griffiths pour calculer la courbure de sous-fibré. Soient $E \to X$ un fibré vectoriel holomorphe au dessus de X, et $F \to X$ un sous-fibré holomorphe de E. On note π la projection orthogonale de E sur F, et $\pi_\perp$ la projection orthogonale de E_x sur $F_x^\perp$ ponctuelle.

Théorème 3.2.3. *Soient u et v deux sections de F. Alors*

$$h(\Omega^E_{jk} u, v) = h(\pi_\perp(D^E_{t_j} u), \pi_\perp(D^E_{t_k} vc)) + h(\Omega^F_{jk} u, v)$$

Démonstration. D'après la définition de connexion de Chern, on a

$$D^F = \pi D^E.$$

Par la définition de courbure, on a

$$\begin{aligned}
\Omega^F_{jk} := \left[D^F_{t_j}, \bar{\partial}_{t_k}\right] &= \pi D^E_{t_j}\bar{\partial}_{t_k} - \bar{\partial}_{t_k}\pi D^E_{t_j} \\
&= \pi D^E_{t_j}\bar{\partial}_{t_k} - \pi\bar{\partial}_{t_k} D^E_{t_j} - \left[\bar{\partial}_{t_k}, \pi\right] D^E_{t_j} \\
&= \pi\Omega^E_{jk} - \left[\bar{\partial}_{t_k}, \pi\right] D^E_{t_j}
\end{aligned}$$

Si u est une section de F, on a $\left[\bar{\partial}_{t_k}, \pi\right] u = 0$. Donc

$$\Omega^F_{jk} u = \pi\Omega^E_{jk} u - \left[\bar{\partial}_{t_k}, \pi\right]\pi_\perp D^E_{t_j} u.$$

Puisque $\pi\pi_\perp = 0$, ce qui implique que

$$\left[\bar{\partial}_{t_k}, \pi\right] \pi_\perp D^E_{t_j} = -\pi\bar{\partial}_{t_k}\pi_\perp D^E_{t_j}.$$

De plus,si v est une autre section de F, on obtient

$$\begin{aligned} h(\left[\bar{\partial}_{t_k}, \pi\right] D^E_{t_j}u, v) &= h(\left[\bar{\partial}_{t_k}, \pi\right] \pi_\perp D^E_{t_j}u, v) \\ &= -h(\bar{\partial}_{t_k}\pi_\perp D^E_{t_j}u, v) \\ &= h(\pi_\perp D^E_{t_j}u, D^E_{t_k}v) \\ &= h(\pi_\perp D^E_{t_j}u, \pi_\perp D_{t_k}v) \end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve. □

3.2.2 Positivité de fibrations holomorphes

Nous allons montrer le théorème 3.2.1, d'après Berndtsson [Ber09]. Nous fixions les notations : j, k pour les indexes de variables t, et λ, μ pour les indices de variables z.

Démonstration du théorème 3.2.1. Nous posons E le fibré vectoriel au dessus de X à $E_t := L^2(\Omega, e^{-2\phi^t})$, c'est-à-dire que

$$E_t := \{f \text{ est une fonction sur } \Omega : \int_\Omega |f|^2 e^{-2\phi^t} < \infty\}.$$

Alors le fibré F est un sous-fibré de E. En plus, d'après la définition de connexions de Chern, on obtient

$$D^E_{t_j} = \partial_{t_j} - \phi_j,$$

où ϕ_j est définie comme $\partial_{t_j}\phi^t$. Alors

$$\Omega_{jk}u = \left[D^E_{t_j}, \bar{\partial}_{t_k}\right] u = \phi_{j\bar{k}}u,$$

où $\phi_{j\bar{k}}$ est définie comme $\partial_{t_j}\bar{\partial}_{t_k}\phi$. Soient $(u_1, \cdots, u_m)$ un m-uplet, et $w = \pi_\perp(\sum \phi_j u_j)$. Pour t fixé, w est la solution minimale de la $\bar{\partial}_z$-équation :

$$\bar{\partial}w = \sum u_j \phi_{j\bar{\lambda}} d\bar{z}_\lambda.$$

D'après l'estimation L^2 de Hörmander avec poids (voir [Dem82], Théorème 5.1), la solution minimale w de l'équation $\bar{\partial}v = f_{\bar{\lambda}} d\bar{z}_\lambda$ vérifie

$$\int_\Omega |w|^2 e^{-\psi} \leq \int_\Omega \psi^{\lambda\bar{\mu}} f_{\bar{\lambda}} \bar{f}_{\bar{\mu}} e^{-\psi}.$$

où $(\psi^{\lambda\bar{\mu}})$ est la matrice adjointe de $(\psi_{\lambda\bar{\mu}})^{-1}$. Dans notre cas, ça veut dire que

$$\int_\Omega |w|^2 e^{-2\phi^t} \leq \int_\Omega \sum \phi^{\lambda\bar{\mu}} \phi_{j\bar{\lambda}} u_j \overline{\phi_{k\bar{\mu}} u_k} e^{-2\phi^t}.$$

D'après la formule de Griffiths dans la dernière section, on obtient

$$\sum_{jk}(\Omega^F_{jk}u_j, u_k) \geq \int_\Omega \sum_{jk} \left(\phi_{j\bar{k}} - \sum_{\lambda\bar{\mu}} \phi^{\lambda\bar{\mu}} \phi_{j\bar{\lambda}} \bar{\phi}_{k\bar{\mu}} \right) u_j \bar{u}_k e^{-2\phi^t}.$$

Il suffit de montrer que

$$D_{jk} := \left(\phi_{j\bar{k}} - \sum_{\lambda,\bar{\mu}} \phi^{\lambda\bar{\mu}} \phi_{j\bar{\lambda}} \bar{\phi}_{k\bar{\mu}} \right)$$

est définie positive pour z fixé (rappelons que t est aussi fixé). Nous tendons un changement linéaire de variables en t pour se ramener au cas $u = (u_1, \cdots, u_m) = (1, 0, \cdots, 0)$. Maintenant nous voyons ϕ comme une fonction sur

$$\{(t_1, z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : (t, z) \in D = U \times \Omega \text{ pour } (t_2, \cdots, t_m) \text{ fixé}\}.$$

Alors la $(1,1)$-forme $\Phi = i\partial\bar{\partial}\phi$ peut s'écrire comme

$$\Phi = \Phi_{11} + i\alpha \wedge d\bar{t}_1 + idt_1 \wedge \bar{\alpha} + \Phi',$$

où Φ_{11} est une $(1,1)$-forme en t_1, α est une $(1,0)$-forme en z et Φ' est une $(1,1)$-forme en z. Alors

$$\Phi_{n+1} := \frac{\Phi^{n+1}}{(n+1)!} = \Phi_{11} \wedge \Phi'_n - i\alpha \wedge \bar{\alpha} \wedge \Phi'_{n-1} \wedge idt_1 \wedge d\bar{t}_1.$$

En fait,

$$\Phi_{m+1} = \det \begin{pmatrix} \phi_{t_1,\bar{t}_1} & \phi_{t_1,\bar{z}_1} & \cdots & \phi_{t_1,\bar{z}_n} \\ \phi_{z_1,\bar{t}_1} & \phi_{z_1,\bar{z}_1} & \cdots & \phi_{z_1,\bar{z}_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \phi_{z_n,\bar{t}_1} & \phi_{z_n,\bar{z}_1} & \cdots & \phi_{z_n \bar{z}_n} \end{pmatrix} dV$$

où $dV = idt_1 \wedge d\bar{t}_1 \wedge idz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge idz_n \wedge d\bar{z}_n$ est une forme volume sur $\mathbb{C}^{n+1}$. En plus,

$$\Phi_{1,1} \wedge \Phi'_m = \phi_{t_1,\bar{t}_1} \det\left(\phi_{z_\lambda,\bar{z}_\mu}\right) dV$$

et

$$\begin{aligned} i\alpha \wedge \bar{\alpha} \wedge \Phi'_{m-1} \wedge idt_1 \wedge d\bar{t}_1 &= \sum_{\lambda,\mu} \phi_{\lambda\bar{t}_1} \bar{\phi}_{\mu\bar{t}_1} (-1)^{\lambda+\mu} \mathbf{M}_{\lambda\bar{\mu}} dV \\ &= \det(\phi_{z_\lambda,\bar{z}_\mu}) \sum_{\lambda,\mu} \phi_{\bar{\mu},t_1} \bar{\phi}_{\bar{\lambda},t_1} \phi^{\mu\bar{\lambda}} dV \\ &= \det(\phi_{z_\lambda,\bar{z}_\mu}) \sum_{\lambda,\mu} \phi_{t_1,\bar{\lambda}} \bar{\phi}_{t_1,\bar{\mu}} \phi^{\lambda\bar{\mu}} dV \end{aligned}$$

où $\mathbf{M}_{\lambda,\mu}$ est le mineur de la matrice $(\phi_{z_\lambda,\bar{z}_\mu})$. Puisque ϕ est une fonction strictement psh sur un domaine de $\mathcal{C}^{n+1}$, alors $\Phi_{m+1} > 0$ et $\Phi'_m > 0$. Donc

$$D_{11} = \phi_{t_1,\bar{t}_1} - \sum_{\lambda,\mu} \phi^{\lambda\bar{\mu}} \phi_{t_1,\bar{\lambda}} \bar{\phi}_{t_1,\bar{\mu}} > 0,$$

c'est-à-dire que

$$\sum_{j,k} D_{jk} u_j \bar{u}_k = D_{11} > 0.$$

Alors $\sum_{jk}(\Omega^F_{jk} u_j, u_k)$ est positif, ce qui implique que F est positif au sens de Nakano. $\square$

Avant de clore cette section, on donne un caractérisation de fibrés qui sont positifs au sens de Griffiths. Nous l'utiliserons plus tard dans la démonstration du théorème d'Ohsawa-Takegoshi.

Proposition 3.2.4. *Un fibré E est (strictement) négatif au sens de Griffiths si et seulement si* $\log \|u\|^2$ *est (strictement) psh pour tout section holomorphe non nul u de E.*

3.3 Théorème d'extension L^2 d'Ohsawa-Takegoshi

Le théorème d'extension d'Ohsawa-Takegoshi est l'un des plus beaux et importants théorème en géométrie complexe actuelle, comme suffisent à montrer les innombrables conséquences (théorème d'approximation de Demailly, théorème de restriction et de sous-additivité des idéaux multiplicateurs, ou même encore le théorème d'invariance des plurigenres !)

La démonstration originale de ce théorème par Ohsawa-Takegoshi [OT87] était trop compliquée. En 2011, Chen [Che11] a donné une preuve courte en utilisant l'estimation de Hörmander directement. Dans cette section, nous allons donner une preuve récent issue de l'article [BL14].

3.3.1 Conjecture de Suita

Dans cette section on donnera les détails de la preuve de la conjecture de Suita, issue de Z. Blocki. Cette méthode peut être développée pour démontrer le théorème d'Ohsawa-Takegoshi.

Soit D un domaine borné dans $\mathbb{C}$ contenant l'origine. Soit $K(z)$ le noyau de Bergman en diagonale de $A^2(D)$. Supposons que $G(z)$ est la fonction de Green de D qui possède un pôle en 0. Alors

$$G(z) = \log |z|^2 - h(z)$$

où h est une fonction sousharmonique telle que $G \equiv 0$ sur ∂D. Alors $h(0) := c_D$ est la fonction de Robin en 0.

Théorème 3.3.1 (Conjecture de Suita)**.** *Avec l'hypothèse ci-dessus,*

$$K(0) \geq \frac{e^{-c_D}}{\pi}.$$

Démonstration. Pour $t \leq 0$, on pose

$$D_t = \{z \in D : G(z) < t\}.$$

Soit K_t le noyau de Bergman (en diagonale) de D_t. Comme

$$\widehat{D} := \{(\tau, z) : G(z) - \mathrm{Re}\tau < 0\}$$

est un domaine pseudoconvexe dans $\mathbb{C}^2$, la fonction $\log K_t(0)$ est une fonction convexe en t. Pour $t << 0$, on a $|h(z) - c_D| < \epsilon$ sur D_t. Alors, si on note Δ_r est le disque de centre 0 et de rayon r, alors

$$\Delta_{r_0} \subset D_t \subset \Delta_{t_1}$$

si $r_0 = e^{\frac{t}{2}+c_D-\epsilon}$ et $r_1 = e^{\frac{t}{2}+c_D+\epsilon}$. D'après la monotonicité des noyaux de Bergman, on a

$$K_t(0) \sim \frac{e^{-t-c_D}}{\pi}$$

quand t tend vers $-\infty$. Donc

$$k(t) := \log K_t(0) + t$$

est en particulier bornée supérieurement quand t tend vers $-\infty$. Comme k est convexe, k est croissante sur $(-\infty, t]$. Alors $k(0) \geq \lim_{t\to-\infty} k(t)$, c'est-à-dire que

$$K_0(0) \geq \frac{e^{-c_D}}{\pi}.$$

Ce qui conclut la preuve. □

3.3.2 Théorème d'extension L^2 d'Ohsawa-Takegoshi

Soit D un domaine pseudoconvexe dans $\mathbb{C}^n$. V est définie par

$$V = D \cap \{z_{n-k+1} = \cdots = z_n = 0\}.$$

En plus, on suppose que la fonction psh

$$G(z) = \frac{1}{2}\log(|z_{n-k+1}|^2 + \cdots + |z_n|^2)$$

est négative sur D, c'est-à-dire que $|z_{n-k+1}|^2 + \cdots + |z_n|^2 < 1$ sur D.

Théorème 3.3.2 (Ohsawa-Takegoshi)**.** *Avec l'hypothèse ci-dessus, soit f une fonction dans $A^2(V)$. Alors il existe une fonction F dans $A^2(D)$ telle que $F|_V = f$ et*

$$\int_D |F|^2 e^{-2\phi} \leq \sigma_k \int_V |f|^2 e^{-2\phi},$$

où σ_k est la volume de la boule unitaire dans $\mathbb{C}^k$.

Remarque 3.3.1. On peut se ramener au cas où Ω est un domaine strictement pseudoconvexe et borné à borne de classe C^∞, ϕ est une fonction lisse et strictement psh au voisinage de l'adhérence D.

En fait, comme D est pseudoconvexe, alors D possède une suite exhaustive $D = \cup D_j$ où D_j est un domaine strictement pseudoconvexe à borne de classe C^∞ qui est relativement compact et vérifie

$\bar{D}_j \subset D^{\circ}_{j+1}$. En plus, sur chaque Ω_j, il existe une fonction ϕ_j strictement psh de classe C^∞ au voisinage de l'adhérence de Ω_j telle que $\phi_j \downarrow \phi$.

Pour chaque j, il existe une fonction holomorphe F_j sur Ω_j telle que $F_j = f$ sur $\Omega_j \cap V$ et

$$\int_{\Omega_j} |F_j|^2 e^{-2\phi_j} \leq \sigma_k \int_{\Omega_j \cap V} |f|^2 e^{-2\phi_j} \leq \sigma_k \int_V |f|^2 e^{-2\phi}.$$

Notons que $\{F_j : j \geq k+1\}$ est une famille normale sur Ω_k, donc on peut extraire une sous-suite $\{F_{j_k}\}$ uniformément convergents sur les parties compactes de Ω. Alors la limite F de $\{F_{j_k}\}$ est une fonction holomorphe sur Ω. En plus, d'après le lemme de Fatou, on a

$$\int_\Omega |F|^2 e^{-2\phi} \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega \chi_{\Omega_{j_k}} |F_{j_k}|^2 e^{-2\phi_{j_k}} \leq \sigma_k \int_V |f|^2 e^{-2\phi}$$

où $\chi_{\Omega_{j_k}}$ est la fonction caractéristique de Ω_{j_k}.

En suite, on va toujours supposer que Ω est un domaine borné et strictement pseudoconvexe à borne lisse, φ est une fonction strictement psh et lisse au voisinage de l'adhérence de D, et V peut s'étendre au voisinage de l'adhérence de D.

Notons que D est de Stein, alors il existe (a priori) une fonction holomorphe F sur D telle que $F|_V = f$. En replaçant D par un sous-domaine relativement compact, on peut aussi supposer qu'il existe une fonction holomorphe F dans $A^2(D)$ telle que $F|_V = f$.

Avant d'entrer les détails, on expliquera un peu analyse fonctionnelle. D'abord, notons que l'application naturelle

$$r : \Gamma(D, \mathcal{O}_D)/\Gamma(D, \mathcal{I}_V) \to \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$$

est un isomorphisme par le théorème d'extension de H. Cartan 2.5.4. Maintenant on obtient deux normes sur (sous-espaces de) $\Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ via cet isomorphisme. La première norme est la norme L^2

$$\|f\|_V^2 := \int_V |f|^2 e^{-2\phi}.$$

La deuxième norme est la norme introduit par l'isomorphisme r et la norme L^2 sur $A^2(D)$

$$\|f\|_0^2 = \inf_{F\in A^2(D), F|_V = f} \int_D |F|^2 e^{-2\phi} = \inf_{F\in A^2(D), F|_V = f} \|F\|_D^2.$$

Maintenant on ne sais pas si $\|f\|_0$ est bien définie pour $f \in A^2(V)$. Soit

$$I^2(V) = A^2(D) \cap \Gamma(D, \mathcal{I}_V).$$

Alors $r(A^2(D)/I^2(V))$ est un sous-espace fermé de $\Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ et $\|\cdot\|_0$ est définie sur

$$H = r(A^2(D)/I^2(V)) \cap A^2(V).$$

On rappel une notation en analyse fonctionnelle. Si E est un espace de Banach et A est une partie de E, on définit l'annulateur $A^\perp$ de A dans E^* comme le sous-espace des formes qui s'annulent sur A :

$$A^\perp := \{\lambda \in E^* : \forall x \in A, \lambda(x) = 0\}.$$

En remplaçant D par un sous-domaine relativement compact, nous poussons supposer que f se prolonge (a priori) en une fonction $F \in A^2(D)$.

Lemme 3.3.3. *Avec l'hypothèse ci-dessus,*

$$\|f\|_0 = \sup_{\lambda \in I^2(V)^\perp} \frac{|\lambda(F)|}{\|\lambda\|},$$

où $\|\lambda\|$ est la norme de λ dans l'espace $A^2(D)^*$.

Soient $g \in C_c^\infty(V)$, $H \in A^2(D)$ et $h = H|_V$. On définit

$$\lambda_g(H) = \int_V h\bar{g}e^{-2\phi}, \forall H \in A^2(D).$$

Notons que le sous-espace $\{\lambda_g : g \in C_c^\infty(V)\}$ est dense dans $I^2(V)^\perp$. Évidemment, on peut aussi voir λ_g comme une application linéaire continue sur $A^2(V)$. Comme $A^2(V)$ est un espace de Hilbert, alors il existe une fonction holomorphe $\widetilde{g} \in A^2(V)$ telle que

$$\lambda_g(h) = \int_V h\bar{\widetilde{g}}e^{-2\phi}, \forall h \in A^2(V).$$

Donc

$$\|f\|_0 = \sup_{\lambda \in I^2(V)^\perp} \frac{|\lambda(F)|}{\|\lambda\|} = \sup_{g \in C_0^\infty(V)} \frac{|\lambda_g(f)|}{\|\lambda_g\|} \leq \sup_{g \in C_0^\infty(V)} \frac{\|f\|_V \|\widetilde{g}\|_V}{\|\lambda_g\|}.$$

Remarque 3.3.2. $\|\lambda_g\|$ est la norme de λ_g dans $A^2(D)^*$, pas dans $A^2(V)^*$.

Soit $D_t = \{z \in D : G(z) < t\}$ pour $t \leq 0$. Posons

$$\psi(\tau, z) := \max(G(z) - \mathrm{Re}\tau, 0).$$

Pour $p \geq 0$, posons

$$A^2_{t,p}(D) := \{H \in \Gamma(D, \mathcal{O}(D)) : \|H\|^2_{t,p} := \int_D |H|^2 e^{-(2\phi + p\psi(t,\cdot)) < \infty}\}.$$

Lemme 3.3.4. *Comme espaces vectoriels,*

$$A^2_{t,p}(D) = A^2_{0,p}(D) = A^2(D), \forall t \leq 0.$$

Démonstration. Évidemment, on a $A^2(D) \subset A^2_{t,p}(D)$, car $e^{-p\psi(t,\cdot)} \leq 1$.

Réciproquement, soit $H \in A^2_{t,p}(D)$. Alors,

$$\begin{aligned}
\int_X |H|^2 e^{-2\phi} e^{-p\psi(t,\cdot)} &= \int_{D_t} |H|^2 e^{-2\phi} + \int_{D \setminus D_t} |H|^2 e^{-2\phi} e^{-p(G-t)} \\
&\geq \int_{D_t} |H|^2 e^{-2\phi} + \int_{D \setminus D_t} |H|^2 e^{-2\phi} e^{pt} \\
&\geq e^{pt} \int_D |H|^2 e^{-2\phi}
\end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve. $\square$

D'après la démonstration ci-dessus, λ_g est aussi une application continue sur $A^2_{t,p}(D)$. Posons

$$\|\lambda_g\|_{t,p} = \|\lambda_g\|_{A^2_{t,p}(D)^*}.$$

D'après le théorème 3.2.1, $\log \|\lambda_g\|^2_{t,p}$ est une fonction convexe en t pour p fixé.

Lemme 3.3.5. *Pour p fixé, on a*

$$\|\lambda_g\|^2_{t,p} e^{kt} = O(1), t \to -\infty.$$

Alors $\log \|\lambda_g\|^2_{t,p} + kt$ *est une fonction croissante. En particulier,*

$$\|\lambda_g\|^2 = \|\lambda_g\|^2_{0,p} \geq \lim_{t \to -\infty} \|\lambda_g\|^2_{t,p} e^{kt}.$$

Démonstration. Soient $H \in A^2_{t,p}(D)$ et $h = H|_V$. D'après la définition, on a

$$|\lambda_g(H)|^2 = |\int_V h\bar{g}e^{-2\phi}|^2 \leq \int_V |g|^2 e^{-2\phi} \int_{V \cap \mathrm{supp}(g)} |h|^2 e^{-2\phi}.$$

Notons que $|H|^2$ est une fonction sousharmonique sur D et ϕ est bornée sur D. Donc, par la propriété de sous-moyenne de fonctions sousharmoniques, on obtient

$$\int_{V \cap \mathrm{supp}(g)} |h|^2 e^{-2\phi} \leq \frac{1}{e^{kt}\sigma_k} \int_{D_t} |H|^2 e^{-2\phi+\epsilon} \leq C' \|H\|^2_{t,p}$$

pour $\epsilon > 0$ et $t << 0$. Donc

$$\|\lambda_g\|^2_{t,p} \leq Ce^{-kt}$$

quand t tend vers $-\infty$. Cela implique que la fonction

$$f(t) = \log \|\lambda_g\|^2_{t,p} + kt$$

est bornée supérieurement quand t tend vers 0. Alors la convexité de f implique f est croissante. □

Soit H une fonction holomorphe au voisinage de $V \cap \bar{D}$, et $h = H|_V$. Le lemme ci-dessous implique que $e^{-kt/2}\|h\|_V$ est dominée par la norme $\|H\|_{A^2(D_t)}$ en $t = -\infty$.

Lemme 3.3.6. *Soit χ une fonction continue sur $\bar{D}$. Alors,*

$$\limsup_{t \to -\infty} e^{-kt} \int_{D_t} \chi \leq \sigma_k \int_V \chi.$$

Démonstration. Il suffit montrer que

$$\limsup_{t \to -\infty} e^{-kt} \int_{D_t} \chi \leq \sigma_k \int_V \chi + \delta$$

pour tout $\delta > 0$. Donnée $\epsilon > 0$, quand t tend vers 0, on a

$$e^{-kt} \int_{D_t} \chi \leq e^{-kt}(e^{kt}\sigma_k) \int_V (\chi + \epsilon) = \sigma_k \int_V (\chi + \epsilon).$$

On prend ϵ assez petit et ce qui conclut la preuve. □

Avant de montrer le dernier lemme, noua avons besoin d'une estimation technique.

Lemme 3.3.7. *Soit $\nu(t)$ une fonction non négative et croissante en $t < 0$. Supposons que $\nu(t) \leq Ce^{kt}$. Alors pour $p > k$, on a*

$$\liminf_{t\to-\infty} e^{-kt}\int_t^0 e^{-p(s-t)}d\nu(s) \leq C\frac{k+1}{p-k}.$$

Démonstration. Soit

$$f(t) := e^{-kt}\int_t^0 e^{-(s-t)}d\nu(s).$$

Il suffit de montrer que

$$\int_{-T}^0 f(t)dt \leq TC\frac{k+1}{p-k}$$

pour T assez grand. En effet,

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^0 f(t)dt &= \int_{-T}^0 e^{-kt}\int_t^0 e^{-p(s-t)}d\nu(s)dt \\
&= \int_{-T}^0 e^{-ps}\int_{-T}^s e^{(p-k)t}dtd\nu(s) \\
&= \frac{1}{p-k}\int_{-T}^0 e^{-ks}d\nu(s) \\
&= \frac{1}{p-k}\left(e^{-ks}\nu(s)|_{-T}^0 + k\int_{-T}^0 e^{-ks}\nu(s)ds\right) \\
&\leq \frac{1}{p-k}\left(\nu(0) + kC\int_{-T}^0 ds\right) \\
&\leq TC\frac{k+1}{p-k}.
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

Lemme 3.3.8. *Pour tout $\delta > 0$, on a*

$$\lim_{t\to-\infty} \sigma_k e^{kt}\|\lambda_g\|_{t,p}^2 \geq \|\widetilde{g}\|_V^2 - \delta,$$

si p est assez grand[3].

Démonstration. On rappel que V se prolonge une sous-variété V' au voisinage de D et $\widetilde{g}$ est une fonction holomorphe dans $A^2(V)$. D'après le lemme 2.5.7,donnée $\epsilon > 0$, il existe une fonction holomorphe $\widehat{g}$ sur V' telle que

$$\int_V |\widehat{g} - \widetilde{g}|^2 e^{-2\phi} < \epsilon.$$

3. Notons que la limite existe d'après 3.3.5.

En plus, $\widehat{g}$ peut se prolonger une fonction holomorphe au voisinage de D, donc une fonction holomorphe dans $A^2(D)$. Alors

$$\begin{aligned}\|\lambda_g\|_{t,p} \geq |\int_V \widehat{g}\bar{\widetilde{g}} e^{-2\phi}|/\|\widehat{g}\|_{t,p} &\geq \left(\|\widetilde{g}\|_V^2 - \|\widetilde{g}-\widehat{g}\|_V\|\widetilde{g}\|_V\right)/\|\widehat{g}\|_{t,p} \\ &= (\|\widetilde{g}\|_V - \epsilon)\|\widetilde{g}\|_V/\|\widehat{g}\|_{t,p}\end{aligned}$$

En remplaçant ϵ par $\epsilon\|\widetilde{g}\|_V$, on obtient

$$\|\lambda_g\|_{t,p} \geq (1-\epsilon)\|\widetilde{g}\|_V^2/\|\widehat{g}\|_{t,p}.$$

Alors

$$\lim_{t\to-\infty} \sigma_k e^{kt}\|\lambda_g\|_{t,p}^2 \geq \frac{(1-\epsilon)^2\sigma_k\|\widetilde{g}\|_V^4}{\liminf_{t\to-\infty} e^{-kt}\|\widehat{g}\|_{t,p}^2}$$

Donc il suffit de montrer que pour certaine $\widehat{g}$, on a

$$\liminf_{t\to-\infty} \sigma_k^{-1}e^{-kt}\|\widehat{g}\|_{t,p}^2 \leq \frac{(1-\epsilon)^2\|\widetilde{g}\|_V^4}{\|\widetilde{g}\|_V^2-\delta} = \|\widetilde{g}\|_V^2 + (\epsilon^2-2\epsilon)\|\widetilde{g}\|_V^2 + \delta(1-\epsilon)^2 + \frac{(1-\epsilon)^2\delta^2}{\|\widetilde{g}\|_V^2-\delta}.$$

pour p assez grand. Donc il suffit de montrer que pour tout $\epsilon' > 0$, on peut trouver certaine $\widehat{g}$ telle que

$$\liminf_{t\to-\infty} \sigma_k^{-1}e^{-kt}\|\widehat{g}\|_{t,p}^2 \leq \|\widetilde{g}\|_V^2 + \epsilon',$$

pour p assez grand. Mais,

$$\|\widehat{g}\|_{t,p}^2 = \int_{D_t} |\widehat{g}|^2 e^{-2\phi} + \int_{D\setminus D_t} |\widehat{g}|^2 e^{-2\phi-p\psi} =: I + II.$$

D'après le lemme 3.3.6,

$$\limsup_{t\to-\infty} e^{-kt} I = \limsup_{t\to-\infty} e^{-kt}\int_{D_t} |\widehat{g}|^2 e^{-2\phi} \leq \sigma_k \int_V |\widehat{g}|^2 e^{-2\phi}.$$

Comme $\widehat{g}e^{-2\phi}$ est continue au voisinage de D, alors il permet une valeur maximum M sur D. On écrit $\nu(t)$ la volume de D_t. D'après le lemme 3.3.6, $\nu(t) \leq Ce^{kt}$ pour certaine constante C. Alors

$$II \leq M\int_t^0 e^{-p(s-t)}d\nu(s)$$

D'après le lemme 3.3.7,

$$\liminf_{t\to-\infty} e^{-kt} II \leq MC\frac{k+1}{p-k}.$$

Alors

$$\liminf_{t\to-\infty} e^{-kt}\|\widehat{g}\|_{t,p}^2 = \liminf_{t\to-\infty} e^{-kt}(I+II) \leq \limsup_{t\to-\infty} e^{-kt} I + \liminf_{t\to-\infty} e^{-kt} II.$$

Donc

$$\liminf_{t\to-\infty} \sigma_k^{-1}e^{-kt}\|\widehat{g}\|_{t,p}^2 \leq \|\widehat{g}\|_V^2 + MC\frac{k+1}{p-k}\sigma_k.$$

On peut choisir $\widehat{g}$ telle que $\|\widehat{g}\|_V^2 \leq \|\widetilde{g}\|_V^2 + \epsilon'/2$. Alors, pour $p >> 0$,on obtient

$$\liminf_{t\to-\infty} \sigma_k^{-1} e^{-kt} \|\widehat{g}\|_{t,p}^2 \leq \|\widetilde{g}\|_V^2 + \epsilon'.$$

Ce qui conclut la preuve. □

Maintenant, on peut montrer le théorème d'extension L^2 d'Ohsawa-Takegoshi 3.3.2.

Démonstration du théorème **??**. D'après les lemmes ci-dessus,

$$\|f\|_0^2 \leq \sup_{g\in C_0^\infty(V)} \frac{\|f\|_V^2 \|\widetilde{g}\|_V^2|}{\|\lambda_g\|^2} \leq \|f\|_V^2 \sup_{g\in C_0^\infty} \frac{\|\widetilde{g}\|_V^2}{\lim\limits_{t\to-\infty} \|\lambda_g\|_{t,p}^2 e^{kt}} \leq \sigma_k \|f\|_V^2.$$

Ce qui conclut la preuve. □

Maintenant on donne une version du théorème d'Ohsawa-Takegoshi sur certaines variétés complexes. Ce théorème est très utile en géométrie complexe, surtout en géométrie algébrique.

Définition 3.3.1. *On dit que une variété kählérienne X est essentiellement Stein s'il existe une hypersurface analytique $S \subset X$ telle que $X \setminus S$ est Stein.*

Exemple 3.3.1. 1) Variété de Stein sont essentiellement Stein.

2) Variété projective X sont essentiellement Stein : Supposons que X se prolonge dans un espace projectif et prenons S d'être l'intersection de X avec un hyperplan.

3) Soit $\pi : X \to \mathbb{D}$ une immersion holomorphe d'une variété complexe X dans le disque unité $\mathbb{D}$ telle que tout fibre $X_t = \pi^{-1}(t)$, $t \in \mathbb{D}$ est une variété compact. S'il existe un fibré en droites positif $L \to X$. Alors S est essentiellement Stein.

Théorème 3.3.9. *Soit X une variété essentiellement Stein. Supposons que $V \subset X$ est une hypersurface telle que $X \setminus V$ est de Stein. Soit $S \subset X$ une hypersurface lisse, ne contenu pas dans V. Supposons que $L \to X$ est un fibré en droites muni d'une métrique singulière $e^{-2\varphi}$, et $e^{-2\psi}$ est une métrique singulière pour le fibré en droites associé le diviseur S, telles que*

(a) Les restrictions $e^{-2\varphi}|_Z$ et $e^{-2(\varphi+\psi)}|_Z$ sont métriques singulières pour L et $L+S$, respectivement.

(b) Il existe une section holomorphe globale $s \in H^0(X, S)$ telle que

$$S = \{s = 0\} \quad \textit{et} \quad \sup_X |s|^2 e^{-2\psi} = 1.$$

(c) $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi \geq 0$ et $\mu\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi \geq \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi$ pour certain entier $\mu > 0$.

Alors pour tout $u \in H^0(S, K_S + L|_S)$ telle que

$$\int_S c_{n-1} u \wedge \bar{s} e^{-2\varphi} < +\infty,$$

il existe une section $U \in H^0(X, K_X + S + L)$ telle que

$$U|_S = u \wedge ds \quad \textit{et} \quad \int_X c_n U \wedge \bar{U} e^{-2(\varphi+\psi)} \leq 8\pi(\mu+2) \int_S c_{n-1} u \wedge \bar{u} e^{-2\varphi}.$$

On explique un peu la preuve de ce théorème, parce que la méthode de réduction est utile pour beaucoup de autres problèmes. On commence avec un lemme très important.

Lemme 3.3.10. *Soit X variété complexe et soit S une hypersurface dans X. Soient u et f des formes dans L^2_{loc} à valeurs dans fibré en droites satisfaisant $\bar{\partial}u = f$ dans le complémentaire de S. Alors la même équation est vraie sur toute X (au sens de courant).*

Par ce lemme, on peut remplacer X par une variété de Stein $X \setminus V$. Même on peut supposer que L est un fibré trivial. En fait, par le théorème 2.5.8, L possède une section globale non nulle s. Soit D le diviseur de s. Si χ est une fonction strictement psh d'exhaustion sur X, alors la fonction $\chi + \log|s|$ est une fonction strictement psh d'exhaustion sur $X \setminus D$. En particulier, $X \setminus D$ est encore de Stein et le fibré $L|_{X\setminus D}$ est trivial. Le lemme ci-dessous permet que le théorème peut se ramener au cas où la métrique est lisse.

Proposition 3.3.11. *Soit X est une variété de Stein et soit D un sous-domaine de Stein relativement compact de X. Soit φ une fonction psh sur X. Alors il existe une suite de fonctions lisse et strictement psh, φ_ν, définie au voisinage de l'adhérence de D, qui descend à φ sur D, En plus, si $i\partial\bar{\partial}\varphi \geq \omega$ où ω est une forme kählérienne et $\delta > 0$, alors on peut choisir φ_ν telle que $i\partial\bar{\partial}\varphi_\nu \geq (1-\delta)\omega$.*

Avant de clore cette section, on donne un énoncé très raffiné du théorème d'Oshawa-Takegoshi, issu de [Dem12a]. Soit X une variété analytique complexe de dimension n. Nous serons amenés à faire sur X certaines hypothèses de pseudoconvexité.

Définition 3.3.2. *La variété X sera dite faiblement pseudoconvexe s'il existe sur X une fonction φ plurisousharmonique et exhaustive, c'est-à-dire que pour tout réel c, l'ouvert $X_c = \{z \in X : \varphi(z) < c\}$ est relativement compact dans X.*

Les variétés de Stein et les variétés compactes sont des exemples de variétés faiblement pseudoconvexes.

Théorème 3.3.12 (Ohsawa-Takegoshi-Manivel [Man93])**.** *Soit X une variété faiblement pseudoconvexe de dimension n muni d'une métrique kählérienne ω. Soient L (resp. E) un fibré en droites holomorphe (resp. un fibré vectoriel de rang r) sur X, et s une section globale holomorphe de E. Supposons que s génériquement transverse à la section nulle, et*

$$Y = \{x \in X : s(x) = 0, \wedge^r ds(x) \neq 0\}, p = \dim Y = n - r.$$

En plus, supposons que $i\Omega_L + ri\partial\bar{\partial}\log|s|^2$ est semi-positive et qu'il y aune fonction continue $\alpha \geq 1$ telle que les deux inégalités suivantes sont vrais sur X.
a) $i\Omega_L + ri\partial\bar{\partial}\log|s|^2 \geq \alpha^{-1}\frac{\{i\Omega_E s,s\}}{|s|^2}$,
b) $|s| \leq e^{-\alpha}$.
Alors pour tout $(0,q)$-forme lisse f sur Y à valeur dans K_X+L telle que $\bar{\partial}f = 0$ et $\int_Y |f|^2|\wedge^r(ds)|^2 < +\infty$, il existe une $(0,q)$-forme F sur X à valeur dans $K_X + L$ telle que $\bar{\partial}F = 0$ et F est lisse sur $X \setminus \{x = \wedge^r(ds) = 0\}$, vérifie $F|_Y = f$ et

$$\int_X \frac{|F|^2}{|s|^{2r}\log^2|s|} dV_{X,\omega} \leq C_r \int_Y \frac{|f|^2}{|\wedge^r(ds)|^2} dV_{Y,\omega},$$

où C_r est une constante qui dépend seulement à r.

3.4 Invariance des plurigenres

Dans une série d'articles remarquables [Siu98] et [Siu02], Y.-T. Siu démontre l'invariance des plurigenres dans le cas d'une famille projective au-dessus du disque unité de $\mathbb{C}$ (la question étant locale sur la base, ce cas suffit amplement). Enfin, M. Păun a donné une nouvelle démonstration de l'invariance des plurigenres [Pau07] : en introduisant la méthode dite One-Tower, il a considérablement simplifié la démonstration de [Siu02].

Définition 3.4.1. *Soit X une variété complexe. Pour chaque $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, le nombre*

$$P_m(X) := \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, mK_X)$$

est dit le m-ième plurigenre de X.

Soit X une variété complexe avec une application holomorphe p de X dans le disque unité. Nous supposerons que p définit une fibration lisse à fibres compacts, c'est-à-dire que la différentielle dp de p est surjective partout et les fibres $X_t = p^{-1}(t)$ sont variétés compacts. On dira que cette famille est projective s'il existe un fibré en droites positif A sur l'espace total X. Le fibre X_0 est une hypersurface lisse définie par l'équation $p = 0$.

On a un théorème de semi-continuité supérieure très connu pour familles projectives.

Théorème 3.4.1 ([Har77] Théorème 12.8)**.** *Soit $f : X \to Y$ un morphisme projectif entre deux schémas noethériens. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X et plat au dessus de Y. Alors, pour chaque $i \geq 0$, la fonction*

$$h^i(y, \mathcal{F}) = \dim_{k(y)} H^i(X_y, \mathcal{F}_y)$$

est semi-continue supérieurement sur Y.

Dans notre cas, ce théorème implique que la fonction $P_m(t)$ est semi-continue supérieurement sur la disque unité $\mathbb{D}$. Notons que le fibre (S) associé l'hypersurface $S = X_0$ est un fibré en droites trivial. Donc par le théorème d'adjonction implique $K_X|_{X_0} = K_{X_0}$, et l'isomorphisme est donné par

$$u \mapsto U = dp \wedge u.$$

Pour simplifier, on identifie u avec $U|_{X_0}$. Le résultat principal de Sui, [Siu02], est le théorème suivant.

Théorème 3.4.2 (Y.-T. Siu 2002)**.** *Soit u une section de $H^0(X_0, mK_X|_{X_0})$, Alors u s'étend en une section U de $H^0(X, mK_X)$.*

Dans le cas $m = 1$, le théorème d'Ohsawa-Takegoshi 3.3.9 appliqué au cas où L et (S) sont à la fois trivial implique le théorème de Siu.

Démonstration. On écrit $L := (m-1)K_X$ tel que $mK_X = K_X + L$. Notre but est de trouver une métrique ϕ sur L à courbure semi-positive telle que la section u vérifie

$$\int_{X_0} c_{n-1} u \wedge \bar{u} e^{-2\phi} < \infty.$$

Après encore par le théorème 3.3.9 on obtient une extension de u (notons que le fibré (S) est trivial ici).

Soit B un fibré en droites positif au dessus de X satisfaisant :

(a) Tout section de $pK_X + B$ sur X_0 s'étend holomorphiquement sur tout X si $\leq m-1$.

(b) Pour $p \leq m-1$, le lieu de base $\mathrm{Bs}(\phi_{pK_X+B|_{X_0}})$ est vide, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de point en lequel tout section s'annule (voir section 5.4).

On commence avec une métrique lisse sur K_X et une métrique lisse à courbure positive sur A. Soit $B = lA$ pour certain l et prenons la métrique induit sur $pK_X + B$. Si l est suffisamment grand, telle métrique est à courbure positive pour $p \leq m-1$. Donc le théorème 3.3.9 implique que tout section holomorphe s'étend.

La deuxième condition est aussi vrai pour l suffisamment grand, voyez les détails dans la preuve du théorème de prolongement de Kodaira 5.4.

Pour $p \leq m-1$, on choisit une base $(s_j^{(p)})$ [4] pour l'espace des sections globales de $pK_X + B$ sur le fibre central X_0.

Lemme 3.4.3. *Pour $k = 0, 1, \cdots$ et $p \leq m-1$, tout section*

$$u^k s_j^{(p)}$$

de $(mk+p)K_X + B$ sur X_0 s'étend holomorphiquement sur tout X.

Démonstration. On démontre ce lemme par récurrence sur $l = mk + p$. On sait par hypothèse que l'énoncé est vrai pour $l < m$, i.e. $k = 0$ et $p \leq m-1$. La premier étape non triviale est d'étendre $us_j^{(0)}$. Posons

$$h_{m-1} = \sum_j |\widetilde{s_j^{(m-1)}}|^2$$

où $\widetilde{s}$ signifie une extension de s. Alors $h_{m-1} = e^{2\phi_{m-1}}$ où ϕ_{m-1} est une métrique sur $(m-1)K_X + B$. Comme le lieu de base de $(m-1)K_X + B$ est vide, cette métrique est vraiment lisse et la quantité

$$\int_{X_0} |us_j^{(0)}|^2 e^{-2\phi_{m-1}}$$

est donc finie (notons que $us_j^{(0)}$ est une section de $mK_X + B|_{X_0} = K_{X_0} + (m-1)K_X + B|_{X_0}$). Donc par le théorème 3.3.9, on peut trouver une extension de $us_j^{(0)}$ satisfaisant

$$\int_X |\widetilde{us_j^{(0)}}|^2 e^{-2\phi_{m-1}} \leq C \int_{X_0} |us_j^{(0)}|^2 e^{-2\phi_{m-1}}. \tag{3.1}$$

4. Soit X une variété complexe et soit L un fibre en droites sur X. Alors l'espace des sections globales de L est de dimension finie.

Posons que $h_m = \sum |\widetilde{us_j^{(0)}}|^2$ et définissons ϕ_m telle que $e^{2\phi_m} = h_m$. La nouvelle métrique n'est plus lisse, mais la singularité vient de la fonction u. Donc on a

$$\int_{X_0} |us_j^{(1)}|^2 e^{-2\phi_m} < \infty.$$

Par récurrence, on conclut la preuve. $\square$

Notons que pendant la preuve on obtient une suite de métriques sur $lK_X + B$,

$$h_l = \sum_j |\widetilde{u^k s_j^{(p)}}|^2$$

pour $l = km + p$. Ces métriques vérifie une très bonne estimation, donnée par

$$\int_X h_{l+1}/h_l \leq C \int_{X_0} h_{l+1}/h_l.$$

En fait, pour $l = m - 1$, on prend la somme en j dans 3.1, de même pour les autres métriques. L'intégrale du côté droit ici est

$$\int_{X_0} \sum |u^k s_j^{(p)}|^2 / \sum |u^k s_j^{(p-1)}|^2$$

si $p > 1$, et

$$\int_{X_0} \sum |u^k s_j^{(0)}|^2 / \sum |u^{k-1} s_j^{(m-1)}|^2$$

si $p = 0$. Donc ils sont bornés par une constante uniforme $\widehat{C}$, dépendent du choix de u et le choix de bases $s_j^{(p)}$, alors on obtient

$$\int_X h_{l+1}/h_l \leq \widehat{C}.$$

Par l'inégalité de Hölder, il implique que

$$\begin{aligned}\int_X h_l^{1/l} &= \int_X (h_l/h_{l-1})^{1/l} (h_{l-1}/h_{l-2})^{1/l} \cdots h_1^{1/l} \\ &\leq \left(\int_X h_l/h_{l-1}\right)^{1/l} \left(\int_X h_{l-1}/h_{l-2}\right)^{1/l} \cdots \left(\int_X h_1\right)^{1/l} \leq C.\end{aligned}$$

En particulier, on prend $l = mk$. Par la propriété de sous-moyenne de fonctions psh,

$$\phi_\infty := \limsup \frac{1}{mk} \phi_{mk}$$

est finie partout. Comme ϕ_{mk} est une métrique sur $mkK_X + B$, ϕ_∞ est une métrique sur K_X. Après prendre la régularisation semi-continue supérieurement, on obtient une métrique ψ sur K_X à courbure semi-positive qui n'est pas plus petit que ϕ_∞ partout. Sur X_0,

$$h_{km} = |u|^{2k} h$$

où h est une fonction lisse positive. Donc $e^{\psi} \geq e^{\phi_\infty} = |u|^{2/m}$ sur X_0, donc

$$\int_{X_0} |u|^2 e^{-(m-1)\psi} \leq \int_{X_0} |u|^{2/m} < \infty.$$

Ce qui conclut la preuve. □

Le théorème de Siu est exactement dit que la fonction $P_m(t)$ est semi-continue inférieurement. Donc on obtient un corollaire principal immédiatement.

Corollaire 3.4.4. *Pour tout entier $m > 0$, la fonction $P_m(t)$ est indépendant de t.*

Remarque 3.4.1. On peut changer la disque unité $\mathbb{D}$ par une base irréductible S, et le théorème est aussi vrai. En fait, pour $x, y \in S$ deux points, on peut connecter x à y par un chaîne de disques analytiques.

Chapitre 4

Nombre de Lelong

Dans ce chapitre, nous introduirons la notion du nombre de Lelong qui est un des premiers invariants introduit pour mesurer des singularités d'une fonction psh. Il est une généralisation de la notion multiplicité. En réalité, il a été défini pour des courants positifs fermés de bidegré (p, p), mais en ce qui nous concerne, nous nous pencherons sur le cas du bidegré $(1, 1)$, c'est-à-dire des fonctions psh.

4.1 Propriétés fondamentales

Dans cette section, on donnera la définition et des propriétés principales du nombre de Lelong.

Définition 4.1.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert, et $\varphi \in \mathrm{Psh}(\Omega)$. Le nombre de Lelong $\nu(\varphi, x)$ de φ en un point x est par définition*

$$\nu(\varphi, x) := \liminf_{z \to x} \frac{\varphi(z)}{\log|z - x|}.$$

Il n'est pas difficile de voir que $\nu(\varphi, x) = \sup\{\gamma \geq 0 : u(z) \leq \gamma \log|z-x| + O(1) \text{ en } x\}$. En particulier, si $u = \log|f|$ pour une fonction holomorphe f, alors

$$\nu(\log|f|, x) = \mathrm{Ord}_x(f) = \max\{m \in \mathbb{N} : D^\alpha f(x) = 0, |\alpha| < m\}.$$

donc le nombre de Lelong donne "l'ordre d'annulation" de e^φ en x. Une caractérisation pratique du nombre de Lelong est la suivante.

Lemme 4.1.1. *Soit f une fonction psh définie sur le polydisque unité D de $\mathbb{C}^n$. Alors on a égalité :*

$$\nu(\varphi, 0) = \lim_{r \to 0} \frac{\sup_{B(0,r)} \varphi}{\log r}.$$

En particulier, la limite ci-dessus existe.

D'après un théorème de Siu [Siu74], on peut aussi définir le nombre de Lelong d'une fonction psh sur une variété complexe.

Théorème 4.1.2 ([Siu74]). *Si f est un biholomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{C}^n$, alors $\nu(f^*(\varphi), x) = \nu(\varphi, f(x))$.*

Maintenant nous introduit la notion de faisceaux d'idéaux multiplicateurs, issue de Nadel.

Définition 4.1.2 (Faisceaux d'idéaux multiplicateurs). *1) Soient $U \subset X$ un ouvert de X, φ une fonction psh sur U. On définit*

$$\Gamma(U, \mathcal{J}(\varphi)) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) : |f|^2 e^{-2\varphi} \in L^1_{loc}(U)\}.$$

2) Soient $\{U_i\}$ un recouvrement ouvert de X, $\varphi := \{\varphi_j \in L^1_{loc}(U_j)\}$ une famille de fonctions localement intégrables telles que $\varphi_i - \varphi_j$ est bornée sur $U_i - U_j$. Alors $\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{J}(\varphi_i)) = \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{J}(\varphi_j))$, donc on a un faisceau globalement défini $\mathcal{J}(\varphi) \subset \mathcal{O}_X$ qui est défini par

$$\mathcal{J}(\varphi)_x = \mathcal{J}(\varphi_i)_x, x \in U_i.$$

Ce faisceau d'idéaux s'appelle le faisceau d'idéaux multiplicateurs associé à φ.

La variété des zéros $V(\mathcal{J}(\varphi))$ est alors l'ensemble des points au voisinage de lequel $e^{-2\varphi}$ n'est pas intégrable.

Lemme 4.1.3 ([Sko72]). *Soit φ une fonction psh sur un ouvert Ω et soit $x \in \Omega$.*

1) Si $\nu(\varphi, x) < 1$, alors $e^{-2\varphi}$ est intégrable au voisinage de x.

2) Si $\nu(\varphi, x) \geq n + s$ pour un entier $s \geq 0$, alors $e^{-2\varphi} \geq C|z - x|^{-2n-2s}$ au voisinage de x, et $\mathcal{J}(\varphi)_x \subset \mathfrak{m}_{\Omega,x}^{s+1}$, où est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\Omega,x}$.

3) La variété des zéros $V(\mathcal{J}(\varphi))$ de $\mathcal{J}(\varphi)$ vérifie

$$E_n(\varphi) \subset V(\mathcal{J}(\varphi)) \subset E_1(\varphi),$$

où $E_c(\varphi) := \{x \in X : \nu(\varphi, x) \geq c\}$.

La démonstration de 1) est un peu compliquée, voyez le livre [Dem12a] (Lemme 5.6) pour les détails. On donnera les preuves pour les dernières deux.

Démonstration. Si $\nu(\varphi, x) = c$, la convexité de la fonction

$$\log r \mapsto \sup_{|z-x|=r} \varphi(z)$$

implique que

$$\varphi(z) \leq c \log \frac{|z - x|}{r_0} + M$$

où M est la borne supérieure sur $B(x, r_0)$. Donc il existe une constante $C > 0$ telle que

$$e^{-2\varphi(z)} \geq C|z - x|^{-2c}$$

au voisinage de x. Le résultat vient de l'estimation suivante :

$$\int_{B(0,r_0)} \frac{|\sum a_\alpha z^\alpha|^2}{|z|^{2c}} dV(z) \sim \text{Const.} \left(\sum |a_\alpha|^2 r^{2|\alpha|}\right) r^{2n-1-2c} dr.$$

Si c a une partie entière $\lfloor c \rfloor = n + s$, l'intégrale converge si et seulement si $a_\alpha = 0$ pour $|\alpha| \leq s$. 3) est un résultat simple de 1) et 2). ☐

4.2 Théorème d'approximation

Dans cette section, nous présenterons une méthode de Demailly pour se rapprocher une fonction psh par des fonctions de type $\alpha \log(\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n|^2)$ où $\alpha \in \mathbb{Q}$, et les f_n sont holomorphes telles que la série dans le logarithme converge localement uniformément et définit une fonction réelle analytique. C'est un théorème fondamentale, car ces dernière fonctions psh aux singularités analytiques bien comprises approchent les fonctions psh général avec un bon contrôle sur les singularités. Nous donnerons même encore une preuve simple d'un théorème utile et difficile de Siu [Siu74], issue de Deamilly [Dem92].

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert pseudoconvexe. Rappelons que le nombre de Lelong $\nu(\varphi, x)$ d'une fonction psh $\varphi \in \mathrm{Psh}(\Omega)$ en un point x est défini par

$$\nu(\varphi, x) = \liminf_{z \to x} \frac{\varphi(z)}{\log |z - x|} = \lim_{r \to 0^+} \frac{\sup_{B(x,r)} \varphi}{\log r}.$$

En particulier, si $\varphi = \log |f|$ pour une fonction holomorphe f sur Ω, alors $\nu(\varphi, x)$ égale à l'ordre d'annulation de f

$$\mathrm{Ord}_x(f) = \sup\{m \in \mathbb{N} : D^\alpha f(x) = 0, |\alpha| < m\}.$$

Théorème 4.2.1 ([Dem92]). *Soit φ une fonction psh sur un ouvert pseudoconvexe borné $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Pour chaque $m > 0$, soit $A^2(\Omega, m\varphi)$ l'espace de Hilbert des fonctions holomorphes sur Ω tels que $\int_\Omega |f|^2 e^{-2m\varphi} dV_n < +\infty$ et soit $\varphi_m = \frac{1}{2m} \log \sum |\psi_\ell|^2$ où (ψ_ℓ) est une base orthonormale de $A^2(\Omega, m\varphi)$. Alors il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ qui sont indépendantes de m telles que*

1) $\varphi(z) - \frac{C_1}{m} \le \varphi_m(z) \le \sup_{|\zeta - z| < r} \varphi(\zeta) + \frac{1}{m} \log \frac{C_2}{r^n}$ pour tout $z \in \Omega$ et $r < d(z, \partial\Omega)$. En particulier, φ_m converge vers φ ponctuellement et pour la topologie L^1_{loc} sur Ω quand $m \to +\infty$,

2) $\nu(\varphi, z) - \frac{n}{m} \le \nu(\varphi_m, z) \le \nu(\varphi, z)$ pour tout $z \in \Omega$.

Démonstration. 1) Comme $\psi_\ell(z) = \mathrm{ev}_z(\psi_\ell)$, alors $\sum |\psi_\ell(z)|^2 = \|\mathrm{ev}_z(\psi_\ell)\|$, c'est-à-dire que

$$\sum |\psi_\ell(z)|^2 = \sup_{\|f\|_m = 1} |f(z)|^2$$

où $\|\cdot\|_m$ est la norme de $A^2(\Omega, m\varphi)$. Notons que $\sum |\psi_\ell|$ est convergente uniformément sur tout compact, et donc elle est analytique réelle. En plus, on a

$$\varphi_m(z) = \sup_{\|f\|=1} \frac{1}{m} \log |f(z)|.$$

Pour $z \in \Omega$ et $r < d(z, \partial\Omega)$, comme $|f|^2$ est une fonction psh, on a

$$|f(z)|^2 \le \frac{1}{r^{2n}\sigma_n} \int_{B(z,r)} |f(\zeta)|^2 dV_n \le \frac{1}{r^{2n}\sigma_n} e^{2C} \int_\Omega |f|^2 e^{-2m\varphi} dV_n,$$

où σ_n est le volume de la boule $B(0,1)$ et $C := \sup_{\zeta \in B(z,r)} \varphi(\zeta)$. Alors

$$\varphi_m(z) \le \sup_{\zeta \in B(z,r)} \varphi(\zeta) + \frac{1}{2m} \log \frac{1}{r^{2n}\sigma_n} = \sup_{\zeta \in B(z,r)} \varphi(\zeta) + \frac{1}{m} \log \frac{C_2}{r^2 n}$$

où $C_2 = \sigma_n^{-\frac{1}{2}}$. En plus, par le théorème d'Ohsawa-Takegoshi, il existe une constante C_3 telle que pour tout $a \in \mathbb{C}$, il existe une fonction holomorphe f sur Ω telle que $f(z) = a$ et

$$\int_\Omega |f|^2 e^{-2m\varphi} dV_n \leq C_3 |a|^2 e^{-2m\varphi(z)}.$$

Comme C_3 ne dépend que a, on peut choisit a de telle sorte que le membre de droite est 1 [1]. Alors $\|f\| \leq 1$ et

$$\varphi_m(z) \geq \frac{1}{m} \log |f(z)| = \frac{1}{m} \log |a| = \varphi(z) - \frac{\log C_3}{2m}.$$

donc on a montré la première inégalité. En posant $r = \frac{1}{m}$, on obtient $\lim_{m\to\infty} \sup_{\zeta \in B(z,\frac{1}{m})} \varphi(\zeta) = \varphi(z)$. Alors $\lim_{m\to\infty} \varphi_m(z) = \varphi(z)$, car $\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log(C_2 m^n) = 0$.

2) L'inégalité ci-dessus implique

$$\sup_{\zeta \in B(z,r)} \varphi(\zeta) - \frac{C_1}{m} \leq \sup_{\zeta \in B(z,r)} \varphi_m(\zeta) \leq \sup_{\zeta \in B(z,2r)} \varphi(\zeta) + \frac{1}{m} \log \frac{C_2}{r^n}.$$

En divisant cette inégalité par par $\log r$ quand $r < 0$, on obtient

$$\frac{\sup_{\zeta \in B(z,2r)} \varphi(\zeta) + \frac{1}{m} \log \frac{C_2}{r^n}}{\log r} \leq \frac{\sup_{\zeta \in B(z,r)} \varphi_m(\zeta)}{\log r} \leq \frac{\sup_{\zeta \in B(z,r)} \varphi(\zeta) - \frac{C_1}{m}}{\log r}.$$

On fait tendre r vers 0, alors

$$\nu(\varphi, x) - \frac{n}{m} \leq \nu(\varphi_m, z) \leq \nu(\varphi, z).$$

□

Le théorème d'approximation implique le théorème d'analyticité, dû à Siu [Siu74] dans la cadre plus général des courants de bidegré (p, p), qui exprime l'analyticité des ensembles de niveau de nombres de Lelong. La preuve originale est longue et technique, mais Demailly [Dem92] a utilisé son théorème d'approximation ci-dessus pour en donner une démonstration très simplifiée, que nous allons présenter.

Corollaire 4.2.2 ([Siu74]). *Soit φ une fonction psh sur une variété complexe X. Alors, pour tout $c > 0$, les ensembles de niveau*

$$E_c(\varphi) := \{z \in X : \nu(\varphi, z) \geq c\}$$

sont des sous-ensembles analytiques de X.

1. Ici il faut supposer que $\varphi(z) \neq -\infty$, mais c'est clair que l'inégalité est même encore vraie pour $\varphi(z) = -\infty$.

Démonstration. Comme l'analyticité est une propriété locale, on se ramène au cas où φ est une fonction psh sur un ouvert pseudoconvexe $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. D'après le théorème ci-dessus, on obtient

$$E_c(\varphi) \subset \cap E_{c-\frac{n}{m}}(\varphi_m) \subset \cap E_{c-\frac{n}{m}}(\varphi) = E_c(\varphi).$$

Tout donc se ramène à montrer le résultat pour les fonctions à singularités analytiques. Notons que

$$\nu(\log|f|, x) = \mathrm{Ord}_x(f) = \sup\{m \in \mathbb{N} : D^\alpha f(x) = 0, |\alpha| < m\}$$

pour les fonctions holomorphes f sur Ω. Alors

$$E_c(\varphi_m) = \bigcap_{|\alpha|<mc, j\geq 1} \{z \in \Omega : D^\alpha g_j(z) = 0\}.$$

ce qui conclut la preuve. □

Chapitre 5

Faisceaux d'idéaux Multiplicateurs

Dans ce chapitre, nous introduirons les faisceaux d'idéaux multiplicateurs.

5.1 Définitions

On toujours suppose que X est une variété complexe.

Définition 5.1.1. ***(Faisceaux d'idéaux multiplicateurs)***

1) Soient $U \subset X$ un ouvert de X, φ une fonction psh sur U. On définit

$$\Gamma(U, \mathcal{I}(\varphi)) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) : |f|^2 e^{-2\varphi} \in L^1_{loc}(U)\}.$$

2) Soient $\{U_i\}\}$ un recouvrement ouvert de X, $\varphi := \{\varphi_j \in L^1_{loc}(U_j)\}$ une famille de fonctions localement intégrables telles que $\varphi_i - \varphi_j$ est bornée sur $U_i - U_j$. Alors $\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{I}(\varphi_i)) = \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{I}(\varphi_j))$, donc on a un faisceau globalement défini $\mathcal{I}(\varphi) \subset \mathcal{O}_X$ qui est défini par

$$\mathcal{I}(\varphi)_x = \mathcal{I}(\varphi_i)_x, x \in U_i.$$

Ce faisceau d'idéaux s'appelle le faisceau d'idéaux multiplicateurs associé à φ.

Remarque 5.1.1. Dans la définition, on définit faisceaux d'idéaux multiplicateurs pour les fonctions localement intégrables. Mais souvent on considère plutôt pour les fonctions psh car le faisceau $\mathcal{J}(\varphi)$ a plus propriétés intéressantes dans ce cas.

On définit les faisceaux d'idéaux multiplicateurs pas la manière analytique ci-dessus. Maintenant, je voudrais donner une autre définition par la manière algébrique.

Définition 5.1.2. *Soit X une variété complexe. Un diviseur effectif D est appelé diviseur à croisements normaux simples (SNC d'après la terminologie anglaise) si pour tout $x \in X$, il existe des coordonnées locales $x_1, \cdots, x_n$ et des entiers non négatifs $a_1, \cdots, a_n$ tels que D est défini par $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$.*

Pour tout morphisme birationnel $f : \widetilde{X} \to X$, il existe un plus grand ouvert non vide U de X tel que $f : f^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$. On appelle le **lieu exceptionnel** de f et on note Exc(f) le complémentaire de $f^{-1}(U)$ dans X'. C'est donc un fermé de $\widetilde{X}$.

Théorème 5.1.1 (Hironaka)**.** *Soit X une variété complexe, $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ un faisceau d'idéaux cohérent définissant un sous-espace Y. Alors il existe une variété complexe (lisse) $\widetilde{X}$ et un morphisme birationnel $\mu : \widetilde{X} \to X$ tel que*
1) μ est un isomorphisme au dessus de du complémentaire de Supp(Y) ;
2) $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{X}} \subset \mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ est un faisceau inversible $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-D)$;
3) Exc$(\mu) \cup D$ est un diviseur SNC.
On appelle telle $(\widetilde{X}, \mu, \mathcal{O}_{\widetilde{X}})$ une log-résolution de $\mathcal{I}$.

Rappelons ici que $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ n'est pa le tiré en arrière au sens des faisceaux de $\mathcal{I}$ mais l'image du faisceau $\mathcal{I}$ vu comme faisceau sur $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ via μ. Ainsi, si $g_1, \cdots, g_N$ sont des générateurs locaux de $\mathcal{I}$, $g_1 \circ \mu, \cdots, g_N \circ \mu$ sont des générateurs locaux de $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{X}}$.

Exemple 5.1.1. 1) Soient $X = \mathbb{A}^2 = Speck[x, y]$ et $\mathfrak{a} = (x^2, y^2)$. En éclatant l'origine de $\mathbb{A}^2$, on obtient

$$Y = Bl_0(\mathbb{A}^2) \xrightarrow{\mu} \mathbb{A}^2 = X.$$

Il existe une carte affine de Y sur lequel μ est une application $\mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ donnée par $(u, v) \mapsto (u, uv)$. Alors on a $\mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_Y(-2E)$. Sur cette carte on a $\mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_Y = (u^2, u^2v^2) = (u^2)$ et $(u = 0)$ est l'équation du diviseur exceptionnel.

2) Soit $\mathfrak{a} = (x^3, y^2)$. Dans ce cas, le log-résolution est construit par trois éclatements et on a $\mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_Y(-2E_1 - 3E_2 - 6E_3)$, où E_i est le diviseur exceptionnel du i-ième éclatement.

Si $\mu : Y \to X$ est un morphisme birationnel, on note $K_{Y/X} = K_Y - \mu^* K_X$ qui est appelé le diviseur canonique relatif de μ. $K_{Y/X}$ est un diviseur effectif sur Y dont l'équation locale est donnée par l'annulation de $\det(df)$.

Si $D = \sum_i a_i D_i$ est un $\mathbb{Q}$-diviseur, on notera $\lfloor D \rfloor = \sum_i \lfloor a_i \rfloor D_i$ sa partie entière et $\{D\} = D - \lfloor D \rfloor$ sa partie fractionnaire (où $[x]$ désigne la partie entière d'un réel x). Notons que les opérations $\lfloor \cdot \rfloor$ et $\{\cdot\}$ ne commutent pas avec les pull-backs en général.

Exemple 5.1.2. On prend $X = \mathbb{A}^2$, Y l'axe des abscisses et E la parabole d'équation $y = x^2$. Si O désigne l'origine de X et $D = \frac{1}{2}E$, on a d'une part $\lfloor D \rfloor = 0$ donc $\lfloor D \rfloor|_Y = 0$. D'autre part, O est un point double de $Y \cap E$ donc $E|_Y = 2O$ et $\lfloor D|_Y \rfloor = \lfloor \frac{1}{2} \cdot 2O \rfloor = O$. Sur cet exemple, on a donc : $\lfloor D|_Y \rfloor \neq \lfloor D \rfloor|_Y$.

Soit $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_X$ un faisceau d'idéaux.

Définition 5.1.3. *Soit $\mu : Y \to X$ une log-résolution de $\mathfrak{a}$ telle que $\mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_Y(-F)$ et $c > 0$ un rationnel. On pose alors*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\mathfrak{a}^c) = \mathcal{I}(c \cdot \mathfrak{a}) &= \mu_* \mathcal{O}_Y(K_{Y/X} - \lfloor c \cdot F \rfloor) \\ &= \{h \in k[X] : \mathrm{ord}_{E_i}(\mu^* h) \geq \lfloor c r_i \rfloor - b_i, \forall i\} \end{aligned}$$

où $F = \sum r_i E_i$ et $K_{Y/X} = \sum b_i E_i$.

Remarque 5.1.2. Notons que le push-forward de classe canonique est aussi classe canonique sous morphisme birationnel. D'après la formule de projection, on a $\mu_* \mathcal{O}_Y(K_{Y/X}) = \mathcal{O}_X$. De plus, si N désigne un diviseur effectif sur Y, $\mu_*(K_{Y/X} - N)$ définit un faisceau d'idéaux sur X.

Nous expliquerons l'équivalence de ces deux définitions dans l'appendice B.

5.2 Théorème de cohérence de Nadel

Les plus importants résultats pour faisceaux d'idéaux sont le théorème de cohérence et le théorème d'annulation issus de Nadel. Le but de cette section est de montrer le premier, en suivant la présentation de [Dem12a].

Théorème 5.2.1 (Cohérence de Nadel)**.** *Soit Ω un ouvert d'une variété kählérienne X. Soit φ une fonction psh sur Ω. Alors le faisceau $\mathcal{I}(\varphi)$ est un faisceau cohérent. En plus, si Ω est une variété de Stein, alors $\mathcal{I}(\varphi)$ est engendré par la base de Hilbert quelconque de l'espace*

$$A^2(\Omega, \varphi) := \{f \in \mathcal{O}(\Omega) : \int_\Omega |f|^2 e^{-2\varphi} dV < +\infty\},$$

où dV est le volume kählérien.

Démonstration. Puisque le résultat est local, on peut supposer que Ω est un ouvert pseudoconvexe borné de $\mathbb{C}^n$. D'après la propriété noethérienne forte de faisceaux cohérents 1.4.2, la famille de faisceaux engendrés par sous-ensemble fini de $A^2(\Omega, \varphi)$ a un élément maximal sur chaque sous-ensemble compact de Ω. Alors $A^2(\Omega, \varphi)$ engendre un faisceau d'idéaux cohérent $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_\Omega$. C'est claire que $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}(\varphi)$. Pour monter l'égalité, il suffit de vérifier que $\mathcal{J}_x + \mathcal{I}(\varphi)_x \cap \mathfrak{m}_{\Omega,x}^{s+1} = \mathcal{I}(\varphi)_x$ pour tout entier s [1] où $\mathfrak{m}_{\Omega,x}$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\Omega,x}$, c'est-à-dire, $\forall f_x \in \mathcal{I}(\varphi)_x$, on veut montrer qu'il existe $F_x \in \mathcal{J}_x$ tel que

$$f_x - F_x \in \mathcal{I}(\varphi)_x \cap \mathfrak{m}_{\Omega,x}^{s+1}.$$

Soit $f = f_x \in \mathcal{I}(\varphi)_x$ définie au voisinage V de x et soit θ une fonction plateau dont le support est contenu dans V et $\theta = 1$ au voisinage de x. On résout l'équation $\bar{\partial} u = g := \bar{\partial}(\theta f)$ par la façon d'estimations L^2 de Hörmoander pour le fibré en droites trivial $\Omega \times \mathbb{C}$ muni de poids psh strictement

$$\widetilde{\phi}(z) = \varphi(z) + (n+s) \log |z - x| + |z|^2.$$

On obtient une solution u telle que $\int_\Omega |u|^2 e^{-2\varphi} |z-x|^{-2(n+s)} d\lambda < \infty$, alors $F = \theta f - u$ est holomorphe, $F \in A^2(\Omega, \varphi)$ et $f_x - F_x = u_x \in \mathcal{I}(\varphi)_x \cap \mathfrak{m}_{\Omega,x}^{s+1}$. Donc $\mathcal{J} = \mathcal{I}(\varphi)$ et $\mathcal{I}(\varphi)$ est cohérent. □

Définition 5.2.1. *Un morphisme propre d'espaces complexes (réduits) $f : X' \to X$ est appelé une modification s'il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "j"] & X \end{tikzcd}$$

où i et j sont des immersions fermées, g est un morphisme propre et surjectif et $f|_{X' \setminus i(Y')}$ est un isomorphisme $X' \setminus i(Y') \cong X \setminus j(Y)$.

Pour modifications entre variétés complexes, on a la proposition suivante concernant l'image directe.

1. Soit A un anneau local noethérienne. Le lemme de Krull dit : soit M un A-module de type fini, alors $\cap_{k \geq 0} \mathfrak{m}^k M = 0$ où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal unique de A.

Proposition 5.2.2. *Soit $\mu : X' \to X$ une modification entre variétés complexes (lisses). Soit φ une fonction psh sur X. Alors*

$$\mu_* \left(\mathcal{O}_{X'}(K_{X'}) \otimes \mathcal{I}(\varphi \circ \mu)\right) = \mathcal{O}_X(K_X) \otimes \mathcal{I}(\varphi).$$

Démonstration. Soient $n = \dim X' = \dim X$, et $S \subset X'$ un ensemble analytique tel que $\mu : X' \setminus \mu^{-1}(S) \to X \setminus S$ est un biholomorphisme. Par la définition de faisceaux d'idéaux, $\mathcal{O}_X(K_X) \otimes \mathcal{I}(\varphi)$ est le faisceau des n-formes holomorphes f sur les ouverts $U \subset X$ telles que $i^{n^2} f \wedge \bar{f} e^{-2\varphi} \in L^1_{\text{loc}}(U)$. On définit l'application

$$\begin{aligned} \delta_U \colon \Gamma(U, \mathcal{O}_X(K_X) \otimes \mathcal{I}(\varphi)) &\to \Gamma(U, \mu_*(\mathcal{O}_{X'}(K_{X'}) \otimes \mathcal{I}(\varphi \circ \mu))) \\ f &\mapsto \mu^* f. \end{aligned}$$

Par la formule de changement de variable, on obtient

$$\int_U i^{n^2} f \wedge \bar{f} e^{-2\varphi} = \int_{\mu^{-1}(U)} i^{n^2} \mu^* f \wedge \overline{\mu^* f} e^{-2\varphi \circ \mu},$$

donc $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X(K_X) \otimes \mathcal{I}(\varphi))$ si et seulement si $\mu^* f \in \Gamma(U, \mu_*(\mathcal{O}_{X'}(K_{X'}) \otimes \mathcal{I}(\varphi \circ \mu)))$, en particulier, δ_U est bien définie. Évidemment, δ_U est injective. Puisque φ est localement bornée supérieurement, pour $F \in \Gamma(U, \mu_*(\mathcal{O}_{X'}(K_{X'}) \otimes \mathcal{I}(\varphi \circ \mu)))$, on a $(\mu^{-1})^* F$ sur $U \setminus S$ qui se prolonge en une forme, notée par f, dans $\Gamma(U, \mathcal{O}_X(K_X) \otimes \mathcal{I}(\varphi))$. Donc $\mu^* f = F$, ce qui implique que δ_U est surjective et donc est un isomorphisme. Ce qui conclut la preuve. $\square$

Remarque 5.2.1. Si X est un espace complexe qui peut-être possède des singularités et φ est une fonction psh sur X, on définit le faisceau $K_X(\varphi)$ sur X comme :

$$K_X(\varphi)(U) = \{f \text{ est une } n-\text{forme sur } U \cap X_{\text{reg}} : i^{n^2} f \wedge \bar{f} e^{-2\varphi} \in L^1_{\text{loc}}(U)\}.$$

Dans ce cas, la proposition 5.2.2 devient

$$\mu_*(K_{X'}(\varphi \circ \mu)) = K_X(\varphi).$$

pour espaces complexes arbitraires X, X' tels que $\mu : X' \to X$ est une modification. Si X est lisse, on a $K_X(\varphi) = \mathcal{O}(K_X) \otimes \mathcal{I}(\varphi)$. Mais si X est singulière, ce résultat est faux !

5.3 Théorème d'annulation de Nadel

Soit X une variété complexe. Nous voulons construire certaines applications de X dans espaces projectives. Ces applications peuvent être définie par sections de fibrés en droites holomorphes. Souvent on essaie de chercher sections en utilisant théorèmes d'annulation pour H^1-groupe de cohomologie. Le but de cette section est de démontrer un théorème d'annulation de Nadel qui est très utile en géométrie complexe. On commence par rappeler le théorème de Kodaira le plus connu et important.

Soit X une variété complexe. Rappelons que l'on dira un fibré en droites holomorphe $L \to X$ **positif** s'il admet une métrique hermitienne lisse à courbure positive.

Théorème 5.3.1. *Soit* (X, ω) *une variété kählérienne compacte et soit* $L \to X$ *un fibré en droites positif. Alors*

$$H^q(X, \mathcal{O}(K_X + L)) = 0, \qquad \textit{pour } q \geq 1.$$

Maintenant, on suppose que L est un fibré en droites muni d'une métrique singulière h à courant de courbure $\Theta_{L,h}$. Si φ est un poids local de h sur Ω, on peut définir le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}(h) = \mathcal{I}(\varphi)$ sur Ω. Notons que $\mathcal{I}(h)$ ne dépend pas du choix de φ. Donc on obtient un faisceau d'idéaux global $\mathcal{I}(h)$ sur X.

Théorème 5.3.2 (Théorème d'annulation de Nadel)**.** *Soit* (X, ω) *une variété kählérienne faiblement pseudoconvexe. Soit* L *un fibré en droites holomorphe sur* X *muni d'une métrique Hermitienne singulière* h *avec poids* φ*. Supposons que* $i\Theta_{L,h} \geq \epsilon\omega$ *pour certaine fonction continue positive* ϵ *sur* X*. Alors*

$$H^q(X, \mathcal{O}(K_X + L) \otimes \mathcal{I}(h)) = 0 \qquad \textit{pour tout } q \geq 1.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{L}^q$ le faisceau des (n, q)-formes u à valeur L et à coefficients mesurables telles que à la fois $|u|^2 e^{-2\varphi}$ et $|\bar{\partial}_L u|^2 e^{-2\varphi}$ soient localement intégrables.

L'opérateur $\bar{\partial}_L$ définit un complexe de faisceaux $(\mathcal{L}^\bullet, \bar{\partial}_L)$ qui est une résolution du faisceau $\mathcal{O}(K_X + L) \otimes \mathcal{I}(h)$. En effet, en degré 0, le noyau de $\bar{\partial}_L$ consiste en les germes de n-formes holomorphes à valeurs dans L satisfaisant la condition d'intégralité, donc dont la fonction coefficient est dans $\mathcal{I}(\varphi)$; en degré $q \geq 1$, c'est une conséquence immédiate du théorème de Hörmander 3.1.11 appliquée à des boules suffisamment petites.

Comme $\mathcal{L}^q$ est un $\mathcal{C}^\infty$-module, alors $\mathcal{L}^\bullet$ est une résolution de acyclique. Par la théorie de faisceaux, on a

$$H^q(\Gamma(X, \mathcal{L}^\bullet)) \cong H^q(X, \mathcal{O}(K_X + L) \otimes \mathcal{I}(\varphi)).$$

On choisit une fonction d'exhaustion psh ψ sur X. Soit u une section globale de $\mathcal{L}^q$. On prend χ une fonction convexe croissante en chaque variable, de croissance arbitrairement rapide à l'infini telle que

$$\int_X |u|^2 e^{-2(\varphi + \chi\circ\psi)} dV_\omega < +\infty.$$

Notons que $\chi \circ \varphi$ est aussi une fonction psh, ainsi le théorème de Hömander 3.1.11 appliquée au fibré L muni de la métrique $e^{-2(\varphi+\chi\circ\psi)}$ montre que u est $\bar{\partial}_L$-exacte. Ce qui conclut la preuve. □

Remarque 5.3.1. Dans la dernière section, on a défini le faisceau $K_X(\varphi)$ pour variétés singulières X. Dans ce cas, sous des hypothèses, par exemple X Kählérienne et faiblement pseudoconvexe, courbure $\geq \epsilon\omega$, on peut obtient le théorème d'annulation de Nadel comme :

$$H^q(X, \mathcal{O}(L) \otimes K_X(\varphi)) = 0 \qquad \text{pour } q \geq 1.$$

On peut le démontrer en se restreignant au X_{reg}. Bien que X_{reg} n'est pas faiblement pseudoconvexe en général, X est toujours Kählérienne et complète (le complémentaire d'un ensemble analytique propre dans un espace Kählérienne faiblement pseudoconvexe est Kählérienne et compète, voir e.g. [Dem82]).

Le théorème d'annulation de Nadel est particulièrement utile dans le cas où la variété de zéros $V(\mathcal{I}(\varphi))$ du faisceau $\mathcal{I}(\varphi)$ possède des points isolés. En fait, on a les corollaire suivants.

Corollaire 5.3.3. *Soit X, ω, L et φ comme dans le théorème de Nadel 5.3.2 et soit $x_1, \cdots, x_N$ des points isolés dans la variété de zéros $V(\mathcal{I}(\varphi))$. Alors il existe une application surjective*

$$H^0(X, K_X + L) \twoheadrightarrow \bigoplus_{1\leq j\leq N} \mathcal{O}(K_X + L)_{x_j} \otimes (\mathcal{O}_X/\mathcal{I}(\varphi))_{x_j}.$$

Démonstration. Considérons la suite exacte courte suivante :

$$0 \to \mathcal{O}(K_X + L) \otimes \mathcal{I}(\varphi) \to \mathcal{O}(K_X + L)\otimes \to \mathcal{O}(K_X + L) \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{I}(\varphi) \to 0.$$

Alors la suite exacte longue de cohomologie associée cette suite exacte courte et le théorème d'annulation de Nadel impliquent le résultat. □

Corollaire 5.3.4. *Soit (X, ω), L et φ comme dans le théorème 5.3.2 et supposons qu'il existe un point isolé x de l'ensemble analytique $E_1(\varphi)$ [2] telle que $\nu(\varphi, x) \geq n + s$ pour un entier $s \geq 0$. Alors $H^0(X, K_X + L)$ engendre les s-jets de sections au point x.*

Démonstration. L'hypothèse que x est un point isolé de $E_1(\varphi)$ implique que $\nu(\varphi, y) < 1$ pour $y \not x$ au voisinage de x. Par le lemme de Skoda 4.1.3, $e^{-2\varphi}$ est intégrable en tels points y, donc $\mathcal{I}(\varphi)_y = \mathcal{O}_{X,y}$, lorsque $\mathcal{I}(\varphi)_x \subset \mathfrak{m}_{X,x}^{s+1}$ aussi par le lemme 4.1.3. Alors on a une surjection naturelle $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}(\varphi) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_X/\mathfrak{m}_{X,x}^{s+1}$, ce qui conclut par le corollaire 5.3.4. □

Remarque 5.3.2. Le théorème d'annulation de Kodaira est un cas spécial du théorème d'annulation de Nadel. En fait, si L est ample, alors L admet une métrique à courbure positive, c'est-à-dire que le poids local φ est une fonction strictement psh de classe $\mathcal{C}^\infty$ partout. Donc on peut poser $\omega = i\partial\bar{\partial}\varphi$ localement. En plus, on a $\mathcal{I}(\varphi) = \mathcal{O}_X$ dans ce cas, donc on obtient le théorème d'annulation de Kodaira.

5.4 Applications importantes

Le but de cette section est de démontrer le théorème de prolongement de Kodaira et le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg qui peut être vu comme des applications du théorème d'annulation de Nadel.

Théorème 5.4.1 (Théorème de Prolongement de Kodaira)**.** *Soit $L \to X$ un fibré en droites sur une variété complexe compact X. Alors L est ample si et seulement si L est positif.*

Avant de démontrer le théorème de Kodaira, on explique un peu l'application projective associée un fibré en droites. Soit $L \to X$ un fibré en droites homomorphe sur une variété complexe compact.

2. Rappelons que $E_1(\varphi)$ est l'ensemble de niveau de Lelong

Alors un résultat connu dit que l'espace de sections holomorphes globales $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est de dimension finie. Soit $s_0, s_1, \cdots, s_N$ une base de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. On définit

$$\begin{aligned} \phi_L \colon X &\to \mathbb{P}^N \\ x &\mapsto [s_0(x) : \cdots : s_N(x)]. \end{aligned}$$

Soit $\mathrm{Bs}(\phi_L) = \{x \in X : s_i(x) = 0, 0 \leq i \leq N\} = \{x \in X : s(x) = 0, \forall s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)\}$ le lieu de base de ϕ_L. Alors ϕ_L est bien définie dans le complémentaire de $\mathrm{Bs}(\phi_L)$. De plus, ϕ_L est unique à un automorphisme de $\mathbb{P}^N$ près. On dira $L \to X$ **ample** si ϕ_{mL} est un prolongement pour certain m. En plus, si ϕ_L est un prolongement, on dira L **très ample**.

Démonstration. Si L est ample, alors on peut voir X comme une sous-variété de $\mathbb{P}^N$, et L comme restriction à X du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$. Alors la restriction de la métrique de Fubini-Study à X répond à notre question.

Si $L \to X$ est un fibré en droites muni d'une métrique lisse $e^{-2\varphi_0}$ à courbure positive, nous allons montrer qu'il existe un entier $m >> 0$ tel que l'application ϕ_{mL} est un prolongement.

Soit $\{U_j\}$ un recouvrement ouvert de X par cartes coordonnées telles que

a) pour tout j, $L|_{U_j}$ est trivial, et

b) il existe des ouverts V_j et W_j tels que $V_j \subset\subset W_j \subset\subset U_j$ et $\{V_j\}$ est aussi un recouvrement ouvert de X.

Comme X est compact, on peut supposer que le recouvrement U_j est fini. On fixe des coordonnées locales z_j sur U_j, et des fonctions lisses χ_j telles que $\chi_j|_{W_j} \equiv 1$ et $\mathrm{Supp}(\chi_j) \subset\subset U_j$. Considérons les fonctions

$$\psi_{j,x}(y) := \chi_j(y) \log |z_j(y) - z_j(x)|^{n+1}, \quad x \in V_j.$$

Alors $\psi_{j,x}$ est une fonction psh sur W_j. Notons que φ_0 est continue sur U_j et W_j est relativement compact. Donc il existe un entier m_j tel que pour tout $x \in V_j$,

$$m_j i\partial\bar{\partial}\varphi_0 + i\partial\bar{\partial}\psi_{j,x} \geq \epsilon_j \omega$$

pour certain nombre ϵ_j. En fait, pour x fixée, sur le compact $X - W_j$, il existe une constante $C_j(x)$ telle que $i\partial\bar{\partial}\psi_{j,x} \geq -C_j(x)\omega$. Notons que φ_0 est strictement psh sur X et φ est psh sur W_j, on peut trouver $m_j(x)$ suffisamment grand tel que

$$m_j(x) i\partial\bar{\partial}\varphi_0 + i\partial\bar{\partial}\psi_{j,x} \geq \epsilon_j(x)\omega.$$

En plus $\overline{V}_j$ est compact dans W_j, donc on peut choisit m_j grand et certaine constante $\epsilon_j > 0$, ne dépendant de x. Soit

$$m := 2 \max_j m_j.$$

Soit $x \neq y \in X$ deux points distincts. Supposons que L possède la métrique $e^{-2(m\varphi_0 + \psi_{i,x} + \psi_{k,x})}$, où $x \in U_i$ et $y \in U_k$. Comme $i\partial\bar{\partial}(m\varphi_0 + \psi_{i,x} + \psi_{k,y}) \geq \epsilon\omega$ et x, y sont points isolée de $V(\mathcal{I}(m\varphi_0 + \psi_{i,x} + \psi_{k,y})$, par 5.3.3, il existe sections holomorphes $\sigma, \sigma' \in H^0(K_X + L)$ telle que

$$\sigma(x) = 0, \quad \sigma(y) \neq 0, \quad \text{et} \quad \sigma'(x) \neq 0, \quad \sigma'(y) \neq 0.$$

Donc $\mathrm{Bs}(\phi_{mL})$ est vide et ϕ_{mL} est injective. En plus, notons que $\nu(m\varphi_0 + \psi_{i,x} + \psi_{k,y}, x) \geq n+1$, par 5.3.4, il existe $\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_n$ engendre les 1-jets au voisinage de x et l'application

$$\begin{aligned} X\colon &\to \mathbb{P}^n \\ x &\mapsto [\sigma_0(x) : \sigma_1(x) : \cdots : \sigma_n(x)] \end{aligned}$$

définit un biholomorphisme au voisinage de x. Ce qui conclut le théorème. □

Avant de donner et démontrer le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg, on donne quelque concepts de L.

Définition 5.4.1. *Soit $L \to X$ un fibré en droites sur une variété complexe X de dimension n.*

1) L est effectif si L admet une section holomorphe globale s qui est non nulle. Si localement s est donnée par s_i, on peut définir une métrique singulière par $\phi = \log|s|^2/2$, c'est-à-dire que $\phi_i = \log|s_i|^2/2$.

2) L est pseudoeffectif si L admet une métrique singulière à courbure non négative au sens de courant.

3) L est numériquement effectif ("nef" en abrégé) si pour tout $\epsilon > 0$, il existe une métrique lisse φ sur L telle que

$$i\partial\bar{\partial}\varphi > -\epsilon\omega,$$

où ω est une forme kählérinne donnée.

4) L est gros s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $d_k \geq \epsilon k^n$ pour k suffisamment grand, où d_k est la dimension de l'espace $H^0(X, kL)$.

Remarque 5.4.1. 1) Un fibré en droites positif est gros. Par le théorème de prolongement de Kodaira, si L est positif, l'application ϕ_{kL} est un prolongement pour certain k. Même on peut montrer que L est gros si et seulement si la dimension maximale de l'image ϕ_{kL} est n.

2) Notre définition de fibrés gros n'est pas originale. La définition originale est comme : L possède une métrique lisse φ telle que l'intégrale

$$\int_C i\partial\bar{\partial}\varphi \geq 0$$

pour toute courbe C dans X. Si X est projective, ces deux définitions coïncident.

On a une estimation pour d_k dans le cas où L est positif (voir [MM10] p48).

Théorème 5.4.2. *Soit X une variété complexe compacte. Soit L un fibré en droites muni d'une métrique lisse ϕ à courbure $i\partial\bar{\partial}(\phi) > 0$. Alors*

$$\lim \frac{d_k}{k^n} = \pi^{-n} \int_X (i\partial\bar{\partial}(\phi))^n$$

Proposition 5.4.3 (Kodaira)**.** *Soit $L \to X$ un fibré en droites sur une variété projective X. Alors L est gros si et seulement s'il peut s'écrire comme*

$$kL = A + E$$

pour certain entier k, où A est ample et E est effectif.

Démonstration. Comme X est projective, elle admet un fibré ample A. En remplaçant A par mA, on peut supposer que A est très ample. Donc il existe une section holomorphe globale s de A qui est non nulle. De plus, pas le théorème de Bertini, on peut supposer que le diviseur S de s n'est pas singulier. Maintenant considérons une suite courte

$$H^0(X, kL - A) \xrightarrow{\mu} H^0(X, kL) \xrightarrow{\rho} H^0(S, kL|_S).$$

La première application est la multiplication par s, et la deuxième application est la restriction. Par le théorème ci-dessus et le fait que L est gros, on a

$$\dim H^0(X, kL) \geq \epsilon k^n, \qquad \dim H^0(S, kL|_S) \leq Ck^n$$

pour k suffisamment grand, où C et ϵ sont deux constantes. Donc $\dim \mathrm{Ker}(\rho) \geq 1$. Soit $0 \neq s_k \in \mathrm{Ker}(\rho)$. Alors s_k peut s'écrire comme

$$s_k = st_k,$$

où t_k est une section holomorphe globale de $E := kL - A$. □

Lemme 5.4.4. *Si L est numériquement effectif et A est ample, alors $L + A$ est ample.*

Démonstration. Soit ψ une métrique sur A à courbure positive. D'après la définition de fibrés gros, L possède une métrique ϕ telle que

$$i\partial\bar{\partial}(\phi) > i\partial\bar{\partial}\psi.$$

Donc $\phi + \psi$ est une métrique sur $L + A$ à courbure positive. □

Théorème 5.4.5 (Théorème d 'annulation de Kawamata-Viehweg)**.** *Soit X une variété projective et soit L un fibré en droites à la fois numériquement effectif et gros. Alors*

$$H^q(X, K_X + L) = 0, \qquad \textit{pour } q \geq 0.$$

D'après le théorème d'annulation de Nadel 5.3.2, il suffit de construire une métrique singulière, φ, sur L satisfaisant l'hypothèse du théorème d'annulation de Nadel, qui est en plus telle que $e^{-2\varphi}$ est localement intégrable.

Démonstration. On écrit $kL = A + E$, où A est ample et E est effectif. Par le lemme 5.4, on a

$$kL + L = A + L + E = A_1 + E,$$

où A_1 est ample. Par récurrence, on obtient

$$(k + m)L = A_m + E,$$

où $A_m = A + mL$ est ample. Soit t une section fixée et non nulle de E. On définit une métrique singulière sur $(k + m)L$ par

$$\phi_m + \log |t|,$$

où ϕ_m est à courbure strictement positive. Alors

$$\phi_L := \frac{1}{k + m}(\phi_m + \log |t|)$$

est une métrique sur L à courbure strictement positive. Notons que ϕ_m est lisse. Donc, si m est suffisamment grand, $e^{-2\phi_L}$ est intégrable. □

Chapitre 6

Exposant de singularité complexe

Dans ce chapitre, nous introduisons les exposants de singularités complexes des fonctions psh et démontrons un théorème de semi-continuité général pour ceux-ci, issu de [DK01].

6.1 Exposant de singularité complexe

Soient X une variété complexe et ϕ une fonction psh en $x \in X$. Le concept des exposants de singularités complexes est considéré pour l'étude des singularité de φ en x.

Définition 6.1.1. *Soient X une variété complexe et ϕ une fonction psh sur X. For un compact $K \subset X$, nous introduisons l'exposant de singularité complexe de ϕ sur K est le nombre réel négatif*

$$c_K(\phi) := \{c \geq 0 : e^{-2c\phi} \text{ est } L^1 \text{au voisinage de } K\}$$

et on définie la multiplicité d'Arnold $\lambda_K(\phi) = c_K(\phi)^{-1}$:

$$\lambda_K(\phi) = \inf\{\lambda > 0 : e^{-2\lambda^{-1}\phi} \text{est } L^1 \text{au voisinage de } K\}.$$

Si $\phi \equiv -\infty$ au voisinage de certaine composant connexe de K, on pose bien sûr $c_K(\phi) = 0$ et $\lambda_K(\phi) = +\infty$.

Voici une autre définition équivalente, qui nous sera utile lorsque l'on voudra estimer la croissance de volumes pour les fonctions psh.

Proposition 6.1.1. *Soient X une variété complexe, ϕ une fonction psh sur X et $K \subset X$ un compact. Soient $U \subset\subset X$ un voisinage relativement compact de K, et μ_U la mesure riemannienne sur U associée à une métrique hermitienne ω sur X. Alors*

$$r^{-2c}\mu_U(\{\phi < \log r\}) \leq \int_U e^{-2c\phi} dV_\omega \leq \mu_U(U) + \int_0^1 2cr^{-2c}\mu_U(\{\phi < \log r\})\frac{dr}{r}.$$

En particulier,

$$c_K(\phi) = \sup\{c \geq 0 : r^{-2c}\mu_U(\{\phi < \log r\}) \text{ est borné quand } r \to 0, \text{pour certain } U \supset K\}.$$

Démonstration. Il n'est pas difficile à voir la première inégalité,

$$r^{-2c}\mu_U(\mu_U\{\phi < \log r\}) = \int_{\{e^{-2c\phi}>r^{-2c}\}} dV_\omega \leq \int_U e^{-2c\phi} dV_\omega$$

Pour la dernière inégalité, on note $A = \{\phi < 0\}$ et $B\{\phi \geq 0\}$, alors

$$\int_U e^{-2c\phi} dV_\omega \leq \mu_U(B) + \int_B e^{-2c\varphi} dV_\omega.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\int_A e^{-2c\phi} dV_\omega &= \int_0^1 r^{-2c} \frac{d\mu_U(\{\phi < \log r\})}{dr} dr \\ &= r^{-2c}\mu(\{\mu < \log r\})|_0^1 - \int_0^1 (-2c) r^{-2c-1}\mu(\{\phi < \log r\}) dr \\ &= \mu_U(A) + \int_0^1 r^{-2c}\mu(\{\phi < \log r\})\frac{dr}{r}\end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve. □

La proposition suivante montre que $C_K(\varphi)$ (donc λ_K) est une propriété locale. En particulier, il permet de ramener le calcul de l'exposant de singularité complexe dans le cas où le compact est réduit à un seul point (on notera $c_x(\phi)$ à la place de $c_{\{x\}}(\phi)$).

Proposition 6.1.2. *Pour toute fonction psh ϕ et tout compact K, on a*

$$c_K(\phi) = \inf_{x\in K} c_x(\phi).$$

Démonstration. Évidemment, on a $\inf_{x\in K} c_x(\phi) \leq c_K(\phi)$. Pour l'autre inégalité, si $c < \inf_{x\in K} c_x(\phi)$, pour tout point $x \in K$, on peut trouver un voisinage U_x de x tel que

$$\int_{U_x} e^{-2c\phi} dV_\omega < +\infty.$$

Par compacité de K, on trouve $x_1, \cdots, x_n \in K$ tels que $U \subset \cup U_{x_i}$. Alors

$$\int_U e^{-2c\phi} \leq \sum_{i=1}^n \int_{U_{x_i}} e^{-2c\phi} dV_\omega < +\infty.$$

Donc $c_K(\phi) \geq \inf_{x\in K} c_x(\phi)$. □

Nous fixons quelques notations pratiques.

- Si f est une fonction holomorphe sur X, on pose $c_K(f) = c_K(\log |f|)$.
- Si $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ est un faisceau cohérent d'idéaux, engendré par fonctions $(g_1, \cdots, g_N)$ au voisinage de K, on pose
$$c_K(\mathcal{I}) = c_K(\frac{1}{2}\log(|g_1|^2 + \cdots + |g_N|^2)).$$

- Si T est un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ sur X qui s'écrit $T = i\partial\bar{\partial}\phi$ sur un voisinage de K, on pose $c_K(T) = c_K(\phi)$.

S'il n'existe pas de sections globales ou ϕ globale ci-dessus, on choisit un recouvrement fini de K et puis on prend l'infimum.

Exemple 6.1.1. Soit f une fonction holomorphe (non nulle) dans $\mathbb{C}^n$ à $f(0) = 0$. Alors on a $c_0(f) := c_0(\log|f|) \leq 1$.

En fait, la propriété est claire pour $n = 1$. Ensuite, quitte à restreindre le voisinage considéré et quitte à considérer une branche de l'hypersurface analytique $\{f = 0\}$, on peut supposer que df_o est non nulle, et que l'hypersurface est égale à $\{z_n = 0\}$.

Si $\int_U |f|^{-2c} < +\infty$ pour certaine $c > 1$, alors par le théorème de Fubini, on peut trouver $(a_1, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ telle que la fonction $z \mapsto f(a_1, \cdots, a_{n-1}, z)$ définit une fonction holomorphe nulle en 0 et $\int_{\{z\in\mathbb{C}:|z|<\epsilon\}} |f(a_1, \cdots, a_{n-1}, z)|^{-2c} < +\infty$ pour ϵ assez petit, c'est absurde !

Lemme 6.1.3 (H. Skoda [Sko77])**.** *Soit ϕ une fonction psh dans $\mathbb{C}^n$. $z_0 \in \mathbb{C}^n$ tel que $e^{-2\phi}$ soit sommable au voisinage de z_0. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe F entière telle que*

$$F(z_0) = 1,$$
$$\int_{\mathbb{C}^n} \frac{|F|^2}{(1+|z|^2)^{n+\epsilon}} e^{-2\phi} < +\infty.$$

D'après le lemme ci-dessus, nous pourra montrer une propriété semi-continue d'exposants de singularité complexe.

Proposition 6.1.4. *Soit ϕ une fonction psh sur une variété complexe X. Alors la fonction $x \mapsto c_x(\phi)$ est semi-continue inférieurement pour la topologie de Zariski (dans sa version analytique, c'est-à-dire la topologie dont les ouverts sont les complémentaires d'ensembles analytiques).*

Démonstration. Fixons un point $x_0 \in X$ et une boule relativement compacte $B := B(x_0, r) \subset\subset X$. Pour $c \geq 0$, soit $\mathcal{H}_{c\phi}(B)$ l'espace de Hilbert des fonctions holomorphes dans B à norme L^2 finie avec poids
$$\|f\|_c^2 := \int_B |f|^2 e^{-2c\phi}.$$

D'après le lemme de Skoda, il existe une fonction $f \in \mathcal{H}_{c\phi}(B)$ à $f(x) = 1$ lorsque $e^{-2\phi}$ est sommable au voisinage de x. Donc
$$\{x \in X : c_x(\phi) \leq c_0\} \cap B = \bigcap_{f \in \bigcup_{c>c_0} \mathcal{H}_{c\phi}(B)} f^{-1}(0)$$

est un ensemble analytique. Ce qui montre la semi-continuité inférieurement pour la topologie de Zariski. $\square$

Par un lemme de Skoda 4.1.3, on peut obtient une relation entre exposants de singularités complexes et les nombres de Lelong.

Proposition 6.1.5. *Soit ϕ une fonction psh sur une variété complexe X. Alors*

$$\frac{1}{n}\nu_x(\phi) \leq \lambda_x(\phi) \leq \nu_x(\phi).$$

Dans le cas holomorphe, le calcul de l'exposant de singularité complexe d'un idéal peut se ramener à celui d'un sous-idéal principal. Avant de donner cette proposition, nous montrerons une identité qui est utile dans la preuve.

Lemme 6.1.6. *Si $w \in \mathbb{C}^p$ est un vecteur et $0 < c < 1$, on a une identité :*

$$\int_{|\alpha|=1} |\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \omega_i|^{-2c} d\sigma = A_c |w|^{-2c},$$

où $d\sigma$ est la mesure euclidienne de la sphère S^{2p-1} dans $\mathbb{C}^p$, et où A_c est une constante finie qui est indépendante que w.

Démonstration. On peut supposer que $w = (w_1, 0, \cdots, 0)$ à une rotation près (car $d\sigma$ est invariante sous $SO(2, \mathbb{R})$). Alors

$$|w|^{2c} \int_{|\alpha|=1} |\sum_{i=1}^{p} \alpha_i w_i|^{-2c} d\sigma = \int_{|\alpha|=1} |\alpha_1|^{-2c} d\sigma =: A_c.$$

Ce qui conclut la preuve. □

Proposition 6.1.7. *Soient $(g_1, \cdots, g_p)$ des fonctions holomorphes dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ et soit $x \in V(g_1, \cdots, g_p)$. Alors*

$$c_x(\alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_p g_p) \leq \min\{c_x(g_1, \cdots, g_p), 1\}$$

pour tous les coefficients $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \in \mathbb{C}^p$. De plus, l'inégalité a lieu pour tous les coefficients $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ dans le complémentaire d'un ensemble de mesure nulle dans $\mathbb{C}^p$. En particulier, si $\mathcal{I}$ est un idéal arbitraire et $c_x(\mathcal{I}) \leq 1$, alors il existe un idéal principal $(f) \subset \mathcal{I}$ tel que $c_x(f) = c_x(\mathcal{I})$

Démonstration. D'après l'exemple 6.1.1, on obtient $c_x(\alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_p g_p) \leq 1$. D'ailleurs, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a aussi :

$$|\alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_p g_p|^{-2c} \geq \left(\sum |\bar{\alpha}_j|^2\right)^{-c} \left(\sum |g_j|^2\right)^{-c}$$

ce qui achève de montrer l'inégalité dans la proposition.

Maintenant fixions une constante $c < \min\{c_x(g_1, \cdots, g_p), 1\}$, alors il existe un voisinage U_c de x sur lequel

$$\int_{|\alpha|=1} d\sigma \int_{U_c} |\sum_{i=1}^{p} \alpha_i g_i|^{-2c} dV = A_c \int_{U_c} \left(\sum_{i=1}^{p} |g_i|^2\right)^{-c} dV < +\infty,$$

ce qui implique la quantité$\int_{U_c} |\sum_{i=1}^p \alpha_i g_i|^{-2c} dV$ est finie pour presque tout $\alpha \in \mathbb{C}^p$. On le note U_c l'ensemble de α tels que la quantité $\int_{U_c} |\sum_{i=1}^p \alpha_i g_i|^{-2c} dV$ n'est pas finie. Si $c = \min\{c_x(g_1, \cdots, g_p), 1\}$, on pose

$$U = \bigcup_n U_{c-\frac{1}{n}}.$$

Alors on trouve l'égalité pour $\alpha \in \mathbb{C}^p \setminus U$, ce qui conclut. □

6.2 Exposant de singularité holomorphe

Dans cette section, nous concernons sur les fonctions psh à singularités analytiques et montrerons le théorème de semi-continuité de l'exposant de singularité holomorphe. Les fonctions psh de ce type sont très importantes, par exemple le théorème d'approximation de Demailly 4.2.1, ainsi le seuil log-canonique (log canonical thresholds en anglais) de faisceaux d'idéaux en géométrie algébrique.

6.2.1 Log-résolution d'un idéal

Rappelons que on a déjà défini la log-résolution pour un idéal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$, où X est une variété complexe 5.1.1. Maintenant, en utilisant cette résolution, on obtient une méthode pour calculer l'exposant de singularité d'un idéal, qui est particulièrement utile en géométrie algébrique.

Lemme 6.2.1. *Soit $f : \widetilde{X} \to X$ un morphisme birationnel entre deux variétés complexes avec des formes volumes fixées, alors le jacobien complexe de f est une section holomorphe du fibré $K_{\widetilde{X}} \otimes (f^*K_X)^{-1}$.*

Démonstration. Le morphisme f induit $df : T_{\widetilde{X}} \to f^*T_X$ naturellement, en prenant le dual et puis la puissance extérieure maximale, on obtient $J_f : f^*K_X \to K_{\widetilde{X}}$, donc J_f est une section du fibré $K_{\widetilde{x}} \otimes (f^*K_X)^{-1}$. Comme f est holomorphe, J_f est aussi holomorphe. □

Proposition 6.2.2. *Soit X une variété complexe, K un compact, $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ un faisceau d'idéaux cohérent. Soit $(\widetilde{X}, \mu, \mathcal{O}_{\widetilde{X}})$ une log-résolution de $\mathcal{I}$. On appelle E_i soit le diviseur exceptionnel de μ, soit une composante irréductible de D, et on note $K_{\widetilde{X}} = \mu^*K_X + \sum a_i E_i$ et $D = \sum b_i E_i$. Alors*

1) $c_K(\mathcal{I}) = \min_{i:\mu(E_i)\cap K \neq \varnothing} \left\{\frac{a_i+1}{b_i}\right\}$.

2) Si $g = (g_1, \cdots, g_N)$ sont des générateurs locaux de $\mathcal{I}$ au voisinage de K, alors pour tout voisinage U de K suffisamment petit, on a l'estimée

$$C_1 r^{2c} \leq \mu_U(\{|g| < r\}) \leq C_2 r^{2c} |\log r|^{n-1}, \forall r < r_0$$

où $n = \dim_{\mathbb{C}} X$, $c = c_K(\mathcal{I})$ et $C_1, C_2, r_0 > 0$.

Démonstration. On suppose que $\mathcal{I}$ est engendré par fonctions holomorphes $g_1, \cdots, g_N \in \mathcal{O}_X$Si U est un ouvert de X, on a

$$\int_{z\in U} |g(z)|^{-2c} dV(z) = \int_{\zeta\in\mu(U)} |g\circ\mu(\zeta)|^{-2c} |J_\mu(\zeta)|^2 d\widetilde{V}(\zeta),$$

où J_μ est le jacobien complexe de μ, et dV, $d\widetilde{V}$ sont les formes volumes de X, $\widetilde{X}$ respectivement. Maintenant supposons que h_i est un générateur de $\mathcal{O}(-E_i)$ en un point $\widetilde{x}$, on a, au voisinage de $\widetilde{x}$ et à facteurs multiplicatifs bornés près :

$$|g\circ\mu|^2 \sim \prod |h_i|^{2b_i}, \quad |J_\mu|^2 \sim \prod |h_i|^{2a_i}$$

et ainsi $|g\circ\mu|^{-2c}|J_\mu|^2$ est L^1 près de $\widetilde{x}$ si et seulement si $\prod |h_i|^{2a_i-2cb_i}$ est L^1. Une condition nécessaire est $cb_i - a_i < 1$ pour tout i tel que $\widetilde{x}\in E_i$. Donc on obtient la condition nécessaire $c < \min_{i:\mu(E_i)\cap K\neq\varnothing}\{(a_i+1)/b_i\}$. Cette condition est aussi suffisante lors que $\sum_i E_i$ est un diviseur à croisements normaux simples.

Pour 2), on choisi une log-résolution $(\widetilde{X}, \mathcal{O}(-D))$ de $\mathcal{I}$. Le volume $\mu_U\{|g| < r\}$ est donné par l'intégrale de la forme

$$\int_{\mu^{-1}(U)\cap\{\zeta\in\widetilde{U}_\alpha, \prod |h_i|^{b_i}<r\}} \prod |h_i(\zeta)|^{2a_i} dV(\zeta) \tag{6.1}$$

sur certaine carte $\widetilde{U}_\alpha \subset \widetilde{X}$. Par changement de variable $\zeta \mapsto w$, $w_i = h_i^{b_i}(\zeta)$, $w_j = \zeta_{k_j}$, (où i parcourt l'ensemble des indices tels que $b_i > 0$, alors que j parcourt son complémentaire). A l'aide de partitions de l'unité, on retrouvera bien l'intégrale désirée sur l'ouvert de départ. Ainsi, il faut estimer les intégrales

$$\int_{P(r)} \prod |w|_i^{2(a_i+1)/b_i-2} dV(w) \quad \text{où } P(r) = \{\max|w_i| < 1, \prod |w_i| < r\}.$$

Cette intégrale est minorée par la même où le domaine d'intégration est remplacée par le voisinage d'un point du type $(w_1, \cdots, w_{i_0-1}, 0, w_{i_0+1}, \cdots, w_n)$ (où les w_i sont des complexes non nuls et i_0 est tel que $c_K(\mathcal{I}) = (a_{i_0}+1)/b_{i_0})$, donc est minorée par $C_1 r^{2C_k(\mathcal{I})}$.

D'autre part, on a pour tout $w\in P(r)$, l'inégalité :

$$\prod |w_i|^{2(a_i+1)/b_i-2} \le (\prod |w_i|)^{2c_K(\mathcal{I})-2} \le r^{2c_K(\mathcal{I})-2}.$$

Et on a :

$$\begin{aligned}
\mu(P(r)) &= \int_{\{\max(|w_1|,\cdots,|w_{n-1}|)<1\}} \pi\min\Big(\frac{r^2}{|w_1|^2\cdots|w_{n-1}|^2}, 1\Big)\prod_{i=1}^{n-1} dV(w_i) \\
&\le \pi\int_{\{\exists i:|w_i|<r\}} \prod_{i=1}^{n-1} dV(w_i) + \pi r^2 \int_{\{\forall i: r\le|w_i|<1\}} \prod_{i=1}^{n-1}\frac{dV(w_i)}{|w_i|^2} \\
&\le C_2 r^2 |\log r|^{n-1}.
\end{aligned}$$

Finalement, en regroupant les deux inégalités, on trouve bien la dernière estimée recherchée. □

6.2.2 Sous-additivité de l'exposant de singulariét holomorphe

Rappelons que, dans le chapitre trois, on a montré le théorème d'extension L^2 3.3.2. Avec les mêmes notations, considérons

$$\phi_k(z_1, \cdots, z_n) = \phi(z_1, \cdots, z_{n-k}, z_{n-k+1}^p, \cdots, z_n^p),$$

$$\Omega_k = \{z \in \mathbb{C} : (z_1, \cdots, z_{n-k}, z_{n-k+1}^p, \cdots, z_n^p) \in \Omega\}.$$

Maintenant on peut montrer le résultat de monotonicité suivant.

Proposition 6.2.3. *Soit ϕ une fonction psh sur une variété complexe X. Soit $Y \subset X$ une sous-variété telle que $\phi|_Y \not\equiv -\infty$ sur chaque composant de Y. Alors, si K un compact de Y, on a*

$$c_K(\phi|_Y) \leq c_K(\phi),$$

où $c_K(\phi)$ est l'exposant de singularité complexe de ϕ sur K dans X.

Démonstration. Il suffit de montrer ce résultat au cas où K est un point $\{y\}$ dans Y. Donc, on peut supposer que X est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et Y est un sous-espace linéaire. Pour $c < c_y(\phi|_Y)$ fixée, il existe une boule $B = B(y, r)$ telle que

$$\int_{B\cap Y} e^{-2c\phi} dV_Y < +\infty.$$

Par le théorème d'extension L^2 3.3.2, en prenant $D = B$, $V = B \cap Y$, et $f = 1$, on trouve une fonction holomorphe F sur B telle que

$$\int_B |F|^2 e^{-2c\phi} dV_{\mathbb{C}^n} \leq C \int_{B\cap Y} e^{-2c\phi} dV_Y < +\infty,$$

où $F|_{B\cap Y} \equiv 1$, surtout $F(y) = 1$. Donc $c_y(\phi) \geq c$, ce qui conclut la preuve. □

Proposition 6.2.4. *Soient X, Y variétés complexes de dimension n et m respectivement, $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ et $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_Y$ idéaux cohérents. Soient $K \subset X$, $L \subset Y$ compacts. Posons que*

$$\mathcal{I} \oplus \mathcal{J} := pr_1^*\mathcal{I} + pr_2^*\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{X\times Y}.$$

Alors

$$c_{K\times L}(\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}) = c_K(\mathcal{I}) + c_L(\mathcal{J}).$$

Démonstration. Évidemment, on peut supposer que $c_{K\times L}(\mathcal{I} \oplus \mathcal{J})$, $c_K(\mathcal{I})$ et $c_L(\mathcal{J})$ sont tous finis, et il suffit de montrer que $c_{(x,y)}(\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}) = c_x(\mathcal{I}) + c_x(\mathcal{J})$ pour tout $(x, y) \in X \times Y$. Alors, on peut supposer que $X \subset \mathbb{C}^n$, $Y \subset \mathbb{C}^m$ sont des ouverts et $(x, y) = (0, 0)$. Soit $\{g_1, \cdots, g_p\}$ (resp. $\{h_1, \cdots, h_q\}$) un système de générateurs de $\mathcal{I}$ (resp. $\mathcal{J}$) au voisinage de 0. On définit ensuite

$$\varphi = \frac{1}{2} \log \sum_{j=1}^{p} |g_j|^2, \qquad \psi = \frac{1}{2} \log \sum_{k=1}^{q} |h_k|^2.$$

Alors $\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$ est engendré par $(p + q)$ fonctions :

$$\{g_1(x), \cdots, g_p(x), h_1(y), \cdots, h_q(y)\},$$

et la fonction psh est définit par

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2} \log \left(\sum_{j=1}^{p} |g_j(x)|^2 + \sum_{k=1}^{q} |h_k(y)|^2 \right),$$

qui a le même comportement aux pôles que $\phi'(x,y) = \max\{\varphi(x), \psi(y)\}$. Plus précisément, on a

$$\phi'(x,y) \leq \phi(x,y) \leq \phi'(x,y) + \frac{1}{2}\log 2.$$

Alors, si U, V sont voisinages suffisamment petits de 0, on a (pour métriques hermitiennes fixées sur X et Y)

$$\mu_{U\times V}\left(\{\max(\varphi(x), \psi(y)) < \log r\}\right) = \mu_U(\{\varphi < \log r\}) \times \mu_V(\{\psi < \log r\}).$$

La proposition 6.2.2 implique que

$$C_1 r^{2(c+c')} \leq \mu_{U\times V}\left(\{\max(\varphi(x), \psi(y)) < \log r\}\right) \leq C_2 r^{2(c+c')} |\log r|^{n+m-2},$$

où $c = c_0(\varphi) = c_0(\mathcal{I})$ et $c' = c_0(\psi) = c_0(\mathcal{J})$. Par la proposition 6.1.1, on obtient

$$c_{(0,0)}(\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}) = c + c' = c_0(\mathcal{I}) +_0 \mathcal{J},$$

ce qui conclut. □

Exemple 6.2.1. Comme $c_0(z^m) = 1/m$, la proposition ci-dessus implique que l'exposant de singularité complexe d'idéal homogène $\mathcal{I} = (z_1^{m_1}, \cdots, z_n^{m_n}) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ est

$$c_0(\mathcal{I}) = \frac{1}{m_1} + \cdots + \frac{1}{m_n}.$$

Maintenant on peut montrer la propriété de sous-additivité de l'exposant de singularité complexe qui est le principal résultat de cette partie.

Théorème 6.2.5. *Soient f, g fonctions holomorphes sur une variété complexe X. Alors, pour tout $x \in X$,*

$$c_x(f+g) \leq c_x(f) + c_x(g).$$

Plus général, si $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont idéaux cohérents, alors

$$c_x(\mathcal{I} + \mathcal{J}) \leq c_x(\mathcal{I}) + c_x(\mathcal{J}).$$

Démonstration. On note Δ la diagonale de $X \times X$. Alors $\mathcal{I} + \mathcal{J}$ peut être vu comme la restriction à Δ de $\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$. Donc d'après la proposition 6.2.3 et la proposition 6.2.4, on a

$$c_x(\mathcal{I} + \mathcal{J}) = c_{(x,x)}((\mathcal{I} \oplus \mathcal{J})|_\Delta) \leq c_{(x,x)}(\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}) = c_x(\mathcal{I}) + c_x(\mathcal{J}).$$

Comme $(f+g) \subset (f) + (g)$, on a aussi

$$c_x(f+g) \leq c_x((f)+(g)) \leq c_x(f) + c_x(g).$$

□

Remarque 6.2.1. Si K n'est pas un point, le théorème de sous-additivité n'est pas forcément vrai. En effet, si on prend $K = \{0,1\} \subset \mathbb{C}$, $f = z$ et $g = 1 - z$, alors $c_K(f) = 1$ et $c_K(g) = 1$, mais $c_K(f+g) = +\infty$.

La proposition 6.2.3 et le théorème 6.2.5 peut être vu comme des cas particuliers du théorème suivant (voir [Dem12a] Chapitre 14).

Théorème 6.2.6. *Soient φ, ψ fonctions psh sur une variété complexe X, et Y une sous-variété de X. Alors*
1) $\mathcal{I}(\varphi|_Y) \subset \mathcal{I}(\varphi)|_Y$.
2) $\mathcal{I}(\varphi+\psi) \subset \mathcal{I}(\varphi)\cdot\mathcal{I}(\psi)$.

Avant de terminer cette partie, on donnera un résultat qui est sorte de réciproque de la proposition 6.2.3. En fait, la proposition 6.2.3 peut être vu comme un théorème d'adjonction. Le théorème suivant 6.2.7 est connu sous le nom d'inversion de l'adjonction qui est très utile en géométrie algébrique complexe. D'abord, on définit une sorte des fonctions psh spéciaux.

Définition 6.2.1. *Soit X une variété complexe. On note $\mathcal{P}_h(X)$ la classe de fonctions psh φ sur X telles que e^{φ} est localement hölderienne continue, c'est-à-dire que pour tout compact $K \subset X$, il existe une constante $C = C_K \geq 0$, $\alpha = \alpha_K > 0$ telle que*

$$\left|e^{\varphi(x)} - e^{\varphi(y)}\right| \leq Cd(x,y)^{\alpha}, \qquad \forall x, y \in K,$$

où d est une métrique riemanienne sur X. Pour simplifier, on dira que telle fonction est une fonction psh hölderienne.

Exemple 6.2.2. Les fonctions du type

$$\varphi = \max_j \log\left(\sum_k \prod_l |f_{j,k,l}|^{\alpha_{j,k,l}}\right)$$

sont des fonctions psh hölderienne, où $f_{j,k,l} \in \mathcal{O}_X(X)$ et $\alpha_{j,k,l} > 0$. En particulier, si $D = \sum \alpha_j D_j$ est un diviseur effectif réel, ses potentiels locaux $\varphi = \sum \alpha_j \log|g_j|$ est une fonction psh hölderienne.

Théorème 6.2.7. *Soit H une hypersurface lisse de X, et T un courant positif fermé de type $(1,1)$ sur X tel que ses potentiels locaux φ soient des fonctions psh höleriennes avec $\varphi|_H \not\equiv -\infty$. On pose alors $T|_H = dd^c\varphi_H$. Alors pour tout compact $K \subset H$, on a*

$$c_K([H]+T) \geq 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad c_K(T|_H) \geq 1.$$

En géométrie algébrique, on dira qu'un paire (X, D) est lc (log canonique) si $c_K(D) \geq 1$ pour tout compact $K \subset X$. Dans ce cas, on reformule le théorème ci-dessus comme :

$$(X, H+D) \text{ est lc} \qquad \Leftrightarrow \qquad (H, D_H) \text{ est lc.}$$

6.2.3 Semi-continuité de l'exposant de singularité holomorphe

Dans la dernière section, on a introduit la notation de fonctions psh hölderiennes. En particulier, si f est une fonction holomorphe, la fonction $\log|f|$ est une fonction psh hölderienne. Dans cette partie, on commencer à donner un théorème de semi-continuité de Varchenko, qui est l'un des points importants dans l'approche du théorème de semi-continuité pour l'exposant de singularité holomorphe.

Proposition 6.2.8. *Soient $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ et $S \subset \mathbb{C}^p$ des ouverts pseudoconvexes bornés. Soit φ une fonction psh hölderienne sur $\Omega \times S$ et $K \subset \Omega$ un compact. Alors*

1) $s \mapsto c_K(\varphi(\cdot, s))$ est semi-continue inférieurement sur S ;

2) Si $s_0 \in S$ et $c < c_K(\varphi(\cdot, s_0))$, il existe un voisinage U de K et une borne uniforme

$$\int_U e^{-2c\varphi(x,s)} dV(x) \leq M(c)$$

pour s dans un voisinage de s_0.

Démonstration. Il suffit de montrer 2), car 1) est un corollaire trivial de 2). Pour commencer, le problème étant de nature locale, on peut supposer que e^{φ} est continue hölderienne d'exposant α sur $\Omega \times S$ et

$$\int_\Omega e^{-2c\varphi(x,s_0)} dV(x) < +\infty.$$

Soit k un entier positif. On pose

$$\psi_{k,s}(x,t) = 2c\varphi(x, s + (kt)^k(s_0 - s)) \quad \text{sur } \Omega \times D$$

où $D \subset \mathbb{C}$ est le disque unité. Alors $\psi_{k,s}$ est bien définie sur $\Omega \times D$ si $s \in V_k := B_S(s_0, k^{-k} d(s_0, \partial S))$. Comme $\psi_{k,s}(x, 1/k) = 2c\varphi(x, s_0)$, d'après le théorème d'Ohsawa-Takegoshi 3.3.2, il existe une fonction holomorphe $F_{k,s}$ sur $\Omega \times D$ telle que $F_{k,s}(x, 1/k) = 1$ et

$$\int_{\Omega \times D} |F_{k,s}(x,t)|^2 e^{-\psi_{k,s}(x,t)} dV(x) dV(t) \leq \int_\Omega e^{-2c\varphi(x,s_0)} dV(x) =: C_1 < +\infty.$$

Comme $\psi_{k,s}$ admet une borne supérieurement globale qui est indépendante de k, s, la famille $\{F_{k,s}\}$ est une famille normale. Si $u, v \in \Omega \times D$, on a, par l'inégalité de Cauchy,

$$|F_{k,s}(u) - F_{k,s}(v)| \leq \sup_{i, V_k} \left| \frac{\partial F_{k,s}}{\partial z_i} \right| \|u - v\| \leq M \|u - v\|,$$

où M est une constante indépendante de k, s. Comme $F_{k,s}(x, 1/k) = 1$, il existe un voisinage U de K et un voisinage $D(0, \epsilon)$ de 0 dans $\mathbb{C}$ tels que $F_{k,s} \geq 1/2$ sur $U \times D(0, \epsilon)$ si k est suffisamment grand. En changeant $t = k^{-1}\tau^{1/k}$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{U \times D(0,(k\epsilon)^k)} \frac{e^{-2c\varphi(x, s + \tau(s_0 - s))}}{|\tau|^{2(1-1/k)}} dV(x) dV(\tau) &\leq k^4 \int_{U \times D(0,\epsilon)} 4|F_{k,s}(x,t)|^2 e^{-\psi_{k,s}(x,t)} dV(x) dV(t) \\ &\leq 4k^4 C_1\end{aligned}$$

car le jacobien est $|\tau|^{2(1/k-1)}/k^4$. Comme e^{φ} est hölderienne continue, on a

$$e^{2c\varphi(x, s + \tau(s_0 - s))} \leq (e^{\varphi(x,s)} + C|\tau(s_0 - s)|^\alpha)^{2c} \leq C_2 \left(e^{2c\varphi(x,s)} + |\tau|^{2c\alpha} \right),$$

où C_2 est une constante indépendante de s. Donc, pour $k \geq 1/\epsilon$, on a

$$\int_{U \times D} \frac{1}{\left(e^{2c\varphi(x,s)} + |\tau|^{2c\alpha}\right) |\tau|^{2(1-1/k)}} dV(x) dV(\tau) \leq C_3(k).$$

On peut restreindre l'intégrale sur $\{(x,\tau) \in U \times D : |\tau| < \delta e^{\alpha^{-1}\varphi(x,s)}\}$ pour δ suffisamment petit pour s'assurer que le rayon est plus petit que 1, donc on obtient

$$\int_U e^{-2(c-1/(k\alpha))\varphi(x,s)} dV(x) \leq C_4(k).$$

Ce qui conclut en prenant k arbitrairement grand et $s \in V_k$. □

Maintenant on peut montrer le théorème de semi-continuité de l'exposant de singularité holomorphe.

Théorème 6.2.9. *Soit X une variété complexe, $K \subset X$ un compact. Alors $f \mapsto c_K(f)$ est semi-continue inférieurement sur $\mathcal{O}_X(X)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Plus précisément, pour toute fonction non nulle f, pour tout compact L contenant K dans son intérieur et tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre $\delta = \delta(f, \epsilon, K, L)$ tel que :*

$$\sum_L |g - f| < \delta \Rightarrow c_K(g) \geq c_K(f) - \epsilon.$$

Démonstration. D'abord, on se ramène au cas où K est un point. Pour cela, on suppose que le résultat du théorème est faux. Alors il existe une suite de fonctions holomorphes $f_i \in \mathcal{O}_X(X)$ convergeant uniformément vers f sur L telles que

$$c_K(f_i) < c_K(f) - \epsilon.$$

Par la proposition 6.1.2, on peut trouver $a_i \in K$ tel que $c_{a_i}(f_i) < c_K(f) - \epsilon$. Par compacité de K, on peut supposer que (a_i) converge vers $a \in K$. En prenant une carte locale en a, on définit les fonctions F_i (pour i assez grand) par

$$F_i(x) = f_i(x + a_i - a)$$

sur une petite boule $\bar{B}(a,r) \subset L^\circ$. Alors F_i converge vers f sur $\bar{B}(a,r)$, mais

$$c_a(F_i) = c_{a_i}(f_i) < c_K(f) - \epsilon \leq c_a(f) - \epsilon,$$

c'est-à-dire que le théorème est faux pour le point a. Donc il suffit de montre le théorème au cas où K est un point. Ensuite on suppose que X est la boule unitaire et K est l'origine 0.

Maintenant on opère une seconde réduction pour se ramener au cas de polynômes de degrés bornés. Pour une fonction holomorphe f, on note P_k sa partie de degré $\leq k$ dans son développement de Taylor. La propriété de sous-additivité 6.2.5 implique

$$|c_0(f) - c_0(P_k)| \leq c_0(f - P_k).$$

Comme $|f(z) - P_k(z)| = O\left(|z|^{k+1}\right)$, la fonction $|f - P_k|^{-2c}$ n'est pas intégrable pour $c \geq n/(k+1)$, c'est-à-dire que $c_0(f - P_k) \leq n/(k+1)$, donc

$$|c_0(f) - c_0(P_k)| \leq \frac{n}{k+1}. \tag{6.2}$$

Maintenant, si (f_i) converge uniformément vers f sur un voisinage $U \subset \mathbb{C}^n$ de 0 donné, la partie de degré $\leq k$, $P_{i,k}$, converge vers P_k dans l'espace des polynômes de degré $\leq k$ qui est noté par $\mathbb{C}[z_1, \cdots, z_n]_k$, car $D^{k+1} f_i$ converge vers $D^{k+1} f$. Voyez polynômes

$$P(z,s) = \sum_{|\alpha| \leq k} s_\alpha z^\alpha \in \mathbb{C}[z_1, \cdots, z_n]_k$$

comme fonctions de ses coefficients $s = (s_\alpha)$. Par la proposition 6.2.8, la fonction $s \mapsto c_0(P(\cdot, s))$ est semi-continue inférieurement. Donc on obtient

$$c_0(P_{i,k}) > c_0(P_k) - \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{for } i > i(k,\epsilon) \text{ suffisamment grand.}$$

Alors

$$c_0(f_i) \geq c_0(P_{i,k}) - \frac{n}{k+1} > c_0(P_k) - \frac{\epsilon}{2} - \frac{n}{k+1} \geq c_0(f) - \frac{n}{k+1} - \frac{\epsilon}{2} - \frac{n}{k+1} > c_0(f) - \epsilon,$$

si on prend $k \geq 4n/\epsilon$. □

6.3 Semi-continuité de l'exposant de singularité complexe

Pour montrer le théorème de semi-continuité de l'exposant de singularité complexe de fonctions psh, nous rappelons le théorème d'approximation de Demailly 4.2.1.

Théorème. *Soit φ une fonction psh sur un ouvert pseudoconvexe borné $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Pour chaque $m > 0$, soit $A^2(\Omega, m\varphi)$ l'espace de Hilbert des fonctions holomorphes sur Ω tels que $\int_\Omega |f|^2 e^{-2m\varphi} dV_n < +\infty$ et soit $\varphi_m = \frac{1}{2m} \log \sum |\psi_\ell|^2$ où (ψ_ℓ) est une base orthonormale de $A^2(\Omega, m\varphi)$. Alors il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ qui sont indépendantes de m telles que*

1) $\varphi(z) - \frac{C_1}{m} \leq \varphi_m(z) \leq \sup_{|\zeta - z| < r} \varphi(\zeta) + \frac{1}{m} \log \frac{C_2}{r^n}$ pour tout $z \in \Omega$ et $r < d(z, \partial\Omega)$. En particulier, φ_m converge vers φ ponctuellement et pour la topologie L^1_{loc} sur Ω quand $m \to +\infty$,

2) $\nu(\varphi, z) - \frac{n}{m} \leq \nu(\varphi_m, z) \leq \nu(\varphi, z)$ pour tout $z \in \Omega$.

Par ce théorème, on peut obtenir des résultats de fonctions psh qui sont montré dans le cas holomorphe.

Proposition 6.3.1. *Soit φ (resp. ψ) une fonction psh sur une variété complexe X (resp. Y). Soient $K \subset X$, $L \subset Y$ compacts. Alors,*

1) Pour tout nombre réel $c', c'' > 0$ avec $c' > c_K(\varphi) > c''$ et tout voisinage U de K suffisamment petit, on a

$$C_1 r^{2c'} \leq \mu_U(\{\varphi < \log r\}) \leq C_2 r^{2c''}, \qquad \forall r < r_0$$

pour certain $r_0 > 0$ et $C - 1 = C_1(c')$, $C_2 = C_2(c'')$.

2) $c_{K \times L}(\max(\varphi, \psi)) = c_K(\varphi) + c_L(\psi)$.

3) Si $X = Y$, alors $c_x(\max(\varphi, \psi)) \leq c_x(\varphi) + c_x(\psi)$ pour tout $x \in X$.

Démonstration. 1) L'inégalité à gauche est claire, car

$$r^{-2c''}\mu_U(\{\varphi < \log r\}) \leq \int_U e^{-2c''\varphi} dV < +\infty$$

pour $U \supset K$ suffisamment petit. Ainsi, notons que

$$\mu_U(\{\psi_m < \log r\}) \geq C_{1,m} r^{2c_K(\psi_m)}$$

par la proposition 6.2.2. Comme $\varphi \leq \psi_m + C_{2,m}$ pour certaine constante $C_{2,m} > 0$, on obtient

$$\{\varphi < \log r\} \supset \{\psi_m < \log r - C_{2,m}\},$$

□

Lemme 6.3.2. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert pseudoconvexe borné. Soit $f_i \in \mathcal{O}(\Omega)$ une suite de fonctions holomorphes convergeant uniformément vers $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ sue les compacts. On fixe un compact $K \subset \Omega$ et $c < c_K(f)$. Alors il existe un voisinage U de K et une borne uniforme $C(K, c) > 0$ telle que*

$$\int_U |f_i|^{-2c} dV \leq C(K, c)$$

pour $i \geq i_0(K, c)$ suffisamment grand.

Démonstration. Puisque le résultat est local, on peut supposer que $K = \{0\}$ est un point. On fixe deux nombres réels c', c'' tels que $c < c'' < c' < c_0(f)$ et un entier k suffisamment grand tel que

$$c < c'' - \frac{n}{k+1} < c'' < c' < c_0(f) - \frac{n}{k+1}.$$

Soit P_k la troncature de f à l'ordre k dans son développement en série de Taylor à l'origine. Comme $c_0(P_k) \geq c_0(f) - n/(k+1) > c'$ par 6.2, il existe une petite boule $B' = B(0, r')$ telle que

$$\int_{B'} |P_k|^{-2c'} dV < +\infty.$$

Puisque les troncatures $P_{i,k}$ de f_i convergent uniformément vers P_k sur B' quand i tend vers $+\infty$. Le lemme 6.2.8 appliqué à la famille de polynômes $P(z, s) = \sum_{|\alpha| \leq k} s_\alpha z^\alpha$ pour toute boule $B'' \subset B'$, il existe une constante $M \geq 0$ et un entier i_0 tel que

$$\int_{B''} |P_{i,k}|^{-2c''} dV \leq M \quad \text{ pour } i \geq i_0.$$

On écrit $P_{i,k} = f_i - g_{i,k}$. On pose $\psi(x, y) = 2c'' \log |f_i(x) - g_{i,k}(y)|$ sur $B'' \times B''$ et soit L la diagonale de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, d'après le théorème d'Ohsawa-Takegoshi, il existe une fonction holomorphe F_i sur $B'' \times B''$ telle que $F_i(x, x) = 1$ et

$$\int_{B'' \times B''} |F_i(x, y)||f_i(x) - g_{i,k}(y)|^{-2c''} dV(x) dV(y) \leq C_1$$

pour une constante C_1 indépendante de i. La borne L^2 montre que $\{F_i\}$ est une famille normale. Donc il existe une petite boule $B = B(0, r_0) \subset\subset B''$ telle que $|F_i x, y| \geq 1/2$ sur $B \times B$ pour tout $i \geq i_0$, et

$$\int_{B\times B} |f_i(x) - g_{i,k}(y)|^{-2c''} dV(x)dV(y) \leq 4C_1. \tag{6.3}$$

En plus, on dispose une estimée uniforme $|g_{i,k}(y)| \leq C_2|y|^{k+1}$ sur B avec une constante C_2 indépendante de i. On peut intégrer l'inégalité 6.3 à rapport à y le long des boules $|y| < (|f_i(x)|/(2C_2))^{1/(k+1)}$ (donc $|g_{i,k}(y)| \leq |f_i(x)|/2$ et ainsi $|f_i(x) - g_{i,k}(y)| > |f_i(x)|/2$ sur ces boules), on obtient une estimée

$$\int_B |f_i(x)|^{2n/(k+1)-2c''} dV(x) \leq C_3.$$

Enfin, l'inégalité $c'' - n/(k+1) > c$ donne le résultat attendu. □

Maintenant on peut montrer la théorème de semi-continuité de l'exposant de singularité complexe de fonctions psh.

Théorème 6.3.3 (Demailly-Kollár [DK01]). *Soient X une variété complexe, $K \subset X$ un compact. Soit $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des fonctions psh localement L^1 sur X, muni de la topologie de convergence L^1 sur les compacts. Alors*

1) L'application $\varphi \mapsto c_K(\varphi)$ est semi-continue inférieurement.

2) ("Version effective") Soit $\varphi \in \mathcal{P}$ donnée. Si $c < c_K(\varphi)$ et ψ_n convergent vers φ dans $\mathcal{P}(X)$, alors $e^{-2c\psi_n}$ converge vers $e^{-2c\varphi}$ en norme L^1 sur un voisinage U de K.

Comme un cas spécial,

3) L'application $\mathcal{O}_X(X) \ni f \mapsto c_K(f)$ est semi-continue inférieurement pour la topologie de convergence uniforme sur les compacts. De plus, si $c < c_K(f)$ et g_n converge vers f dans $\mathcal{O}_X(X)$, alors $|g|^{-2c}$ converge vers $|f|^{-2c}$ en norme L^1 sur un voisinage U de K.

Avant de donner les détails de la preuve, on note qu'il suffit de démontrer 2) et supposons que $K = \{x\}$ est un point et X est une boule de centre x . En effet, si 2) est vrai dans le cas où $K = \{x\}$ est un point, il existe un voisinage U_x de x telle que pour $\epsilon > 0$ et $c < c_x(\varphi)$, on a

$$\int_{U_x} \left| e^{-2c\psi_n} - e^{-2c\varphi} \right| < \epsilon$$

pour $n >$ certain N_x. Si K est un compact, il existe $x_1, \cdots, x_s$ tels que $K \subset \bigcup U_{x_i}$. Donc

$$\int_{\bigcup U_{x_i}} \left| e^{-2c\psi_n} - e^{-2c\varphi} \right| \leq \sum \int_{U_{x_i}} \left| e^{-2c\psi_n} - e^{-2c\varphi} \right| < s\epsilon$$

pour $n > \max\{N_{x_1}, \cdots, N_{x_s}\}$. Donc 2) est aussi vrai dans le cas général où K est un compact.

Démonstration. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert borné pseudoconvexe et soit $\varphi_j \in \mathcal{P}(\Omega)$ une suite de fonctions psh convergeant vers φ dans $\mathcal{P}(\Omega)$. Notons qu'il suffit de montrer le résultat 2) pour une sous-suite (φ_{j_p}) : en effet, si le résultat était faux pour la suite (φ_j), il existerait une $c < c_K(\varphi)$ telle que pour tout $U \supset K$, $e^{-2c\varphi_j}$ ne converge pas vers $e^{-2c\varphi}$ dans $L^1(U)$. Ceci signifie qu'il existe $\epsilon_U > 0$ et une sous-suite (φ_{j_ℓ}) telle que

$$\int_U |e^{-2c\varphi_{j_\ell}} - e^{-2c\varphi}|dV < \epsilon_U.$$

Maintenant, en remplaçant (φ_j) par (φ_{j_ℓ}), on obtient une contradiction.

Par le théorème d'approximation de Demailly 4.2.1, à $m > 0$ fixé, tout base orthonormée $(g_{j,m,k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $A^2(\Omega, m\varphi_j)$ vérifie :

$$\varphi_j(z) - \frac{C_1}{m} \leq \frac{1}{2m}\log\sum_{k\in\mathbb{N}}|g_{j,m,k}|^2 \leq \sup_{|\zeta-z|<r}\varphi_j(\zeta) + \frac{1}{m}\log\frac{C_2}{r^n} \tag{6.4}$$

pour tout $z \in \Omega$ et $r < d(z, \partial\Omega)$. Soit $K \subset \Omega$ un compact. Alors, d'après le théorème 2.2.6, la suite (φ_j) est majorée sur tout compact de Ω, donc $g_{j,m,k}$ est majorée sur tout compact de Ω. Alors il existe une sous-suite $(g_{j_p,m,k})$ qui converge uniformément vers $g_{m,k} \in \mathcal{O}(\Omega)$ sur les compacts. De plus, on peut supposer que $g_{j_p,m,k}$ converge vers $g_{m,k}$ uniformément pour m et k aussi. Donc, par 6.4 et en remplaçant $(g_{j,m,k})$ par $(g_{j_p,m,k})$, on obtient

$$\varphi(z) - \frac{C_1}{m} \leq \frac{1}{2m}\log\sum_{k\in\mathbb{N}}|g_{m,k}(z)|^2 \leq \sup_{|\zeta-z|<r}\varphi(\zeta) + \frac{1}{m}\log\frac{C_2}{r^n}.$$

Soit $K \subset \Omega$ un compact, et $K \subset \Omega' \subset\subset \Omega$ un ouvert relativement compact. Notons que les faisceaux d'idéaux $\mathcal{I}(m\varphi_j)$ sont engendrés par $(g_{j,m,k})$ (cf. Théorème 5.2.1). Alors, d'après la proposition 1.4.2, il existe un entier $k_0(m)$ tel que le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}(m\varphi_j)$ est engendré par $(g_{j,m,k})_{k\leq k_0(j,m)}$ sur Ω'. Donc, il existe une constante $C_3'(j,m) > 0$ telle que

$$\varphi_j(z) - C_3'(j,m) \leq \frac{1}{2m}\log\sum_{0\leq k\leq k_0(j,m)}|g_{j,m,k}|^2, \quad \text{sur } \Omega'.$$

Mais notons que φ_j converge φ uniformément sur Ω' et $\log\sum_{k\in\mathbb{N}}|g_{j,m,k}|^2$ converge $\log\sum_{k\in\mathbb{N}}|g_{m,k}|^2$ uniformément sur Ω'. Donc pour j suffisamment grand, on a

$$\varphi(z) - C_3(j,m) \leq \varphi_j(z) - C_3'(j,m) \leq \frac{1}{2m}\sum_{0\leq k\leq k_0(j,m)}|g_{j,m,k}|^2 \leq \frac{1}{2m}\sum_{0\leq k\leq k_0(j,m)}|g_{m,k}|^2 + M, \quad \text{sur } \Omega',$$

où $C_3(j,m)$ et M sont deux constante. En posant $C_3(m) = C_3(j,m) + M$ et $k_0(m) = k_0(j,m)$ pour un j fixée, on a

$$\varphi(z) - C_3(m) \leq \frac{1}{2m}\sum_{0\leq k\leq k_0(m)}|g_{m,k}|^2, \quad \text{sur } \Omega'.$$

Maintenant, pour $c < c_K(\varphi)$, il existe un voisinage U de K tel que

$$\begin{aligned}\int_U \left(\sum_{0\leq k\leq k_0(m)}|g_{m,k}|^2\right)^{-\frac{c}{m}} dV &\leq \int_U \left(\sum_{0\leq k\leq k_0(m)} e^{-2m\varphi+2mC_4(m)}\right)^{\frac{c}{m}} dV \\ &\leq e^{2cC_4(m)}\int_U e^{-2c\varphi}dV < +\infty.\end{aligned}$$

On prend $m \geq 2C_K(\varphi)$. Alors $c/m < 1/2$. Par 6.1.7, il existe $\alpha = (\alpha_{m,k})$ dans la boule unité de $\mathbb{C}^{k_0(m)+1}$ tel que

$$\int_U \left| \sum_{0 \leq k \leq k_0(m)} \alpha_{m,k} g_{m,k} \right|^{-\frac{2c}{m}} dV \leq C_4(c,m) \int_U e^{-2c\varphi} dV < +\infty.$$

où $C_4(c,m)$ est une constante. On définit

$$f_{j,m} = \sum_{0 \leq k \leq k_0(m)} \alpha_{k,m} g_{j,m,k},$$

alors $f_{j,m}$ est un élément de la sphère unité de l'espace $A^2(\Omega, m\varphi_j)$. En plus, on a $f_{j,m}$ converge uniformément vers $f_m = \sum \alpha_{m,k} g_{m,k}$ sur les compacts de Ω. Par le lemme 6.3.2 ci-dessus, pour $c' < c$ et $K \subset U' \subset\subset U$, on a une borne uniforme

$$\int_{U'} |f_{j,m}|^{-2c'/m} dV \leq C_5(c, U', m)$$

pour $j \geq j_0$ suffisamment grand. Comme

$$\int_\Omega |f_{j,m}|^2 e^{-2m\varphi_j} dV = 1,$$

l'inégalité de Hölder appliquée aux exposants $p = 1 + m/c'$, $q = 1 + c'/m$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\int_{U'} e^{-2mc'/(m+c')\varphi_j} dV &= \int_{U'} \left(|f_{j,m}|^2 e^{-2m\varphi_j}\right)^{c'/(m+c')} |f_{j,m}|^{-2c'/(m+c')} dV \\ &\leq \left(\int_{U'} |f_{j,m}|^2 - 2c'/m dV\right)^{m/(m+c')} \leq C_6(c, U', m)\end{aligned}$$

pour $j \geq j_0$. Comme c' est arbitraire, l'exposant $mc'/(m+c')$ peut être pris proche c que l'on veut en prenant m grand. Donc $c_K(\varphi_j) > c_K(\varphi) - \epsilon$ pour $j \geq j_0(\epsilon)$ suffisamment grand. En plus, si $c < c_K(\varphi)$ est fixé et $0 < \delta < c_K(\varphi) - 1$, il existe $j_1(\delta)$ telle que la suite $(e^{-2c\varphi_j})_{j \geq j_1(\delta)}$ est contenue dans un sous-ensemble borné de $L^{1+\delta}(U)$, où U est un voisinage de K. Donc

$$\int_{U \cap \{e^{-2c\varphi_j} > M\}} e^{-2c\varphi_j} dV \leq C_7 M^\delta$$

pour $j \geq j_1(\delta)$, avec C_8 une constante qui dépend que j. Comme $e^{-2c\varphi_j}$ converge vers $e^{-2c\varphi}$ ponctuellement, par le théorème de convergence dominée, on obtient que $e^{-2c\varphi_j}$ converge vers $e^{-2c\varphi}$ dans $L^1(U)$. Ce qui conclut la preuve. $\square$

Chapitre 7

Conjecture d'ouverture Forte

Soient X une variété complexe de dimension n, et u une fonction plurisousharmonique sur X. On pose $\mathcal{I}(u)$ le faisceau d'idéal multiplicateur associé à la fonction plurisousharmonique u sur X. Note

$$\mathcal{I}_+(u) := \cup_{\epsilon>0}\mathcal{I}((1+\epsilon)u)$$

Conjecture d'ouverture Forte : Pour toute la fonction plurisousharmonique u sur X, on a

$$\mathcal{I}_+(u) = \mathcal{I}(u)$$

Localement, on considère un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ et un point $x \in U$. Pour une fonction holomorphe f au voisinage de x, on note le germe de f en x par f_x. Une fonction mesurable $u : U \to [-\infty, +\infty]$ définit un idéal $\mathcal{I}(u, x)$ dans l'anneau $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,x}$ des germes holomorphes en x.

$$\mathcal{I}(u,x) = \{f_x : f \in \mathcal{O}(V), \int_V |f|^2 e^{-u} < \infty, V \subset U \text{ } ouvert, x \in V\}$$

où l'intégrale est l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{C}^m$. Clairement, si $v < u + O(1)$ en x, on a $\mathcal{I}(u,x) \supset \mathcal{I}(v,x)$.

7.1 Conjecture d'ouverture forte pour fonctions psh

Maintenant, on va montrer la conjecture d'ouverture forte en suivant l'article [Lem14].

Théorème 7.1.1 (Guan-Zhou 2013 [GZ13])**.** *Si $u_1 \leq u_2 \leq \cdots$ sont fonctions plurisousharmonique sur U et $u = \lim_j u_j$ est bornée supérieurement localement sur U, alors il existe j tel que $\mathcal{I}(u,x) = \mathcal{I}(u_j, x)$.*

Pour la conjecture originale, on peut toujours supposer que u est bornée supérieurement, et donc $u \leq 0$. Alors, si on pose que $u_j = (1 + \frac{1}{j})u$, on obtient la conjecture originale.

On pose $J = \cup_j \mathcal{I}(u_j, 0)$. Supposons que $P \subset \mathbb{C}^m$ est une hyperplan complexe (affine) et $W \subset P$ est ouvert dans P. Pour une fonction mesurable $g : W \to \mathbb{C}$, on définit $\|g\| \in [0, \infty]$ par

$$\|g\|^2 = \inf_j \int_W |g|^2 e^{-u_j}.$$

Par le théorème de convergence dominée, on a

$$\|g\|^2 = \begin{cases} \infty & ou \\ \lim_j \int_W |g|^2 e^{-u_j} = \int_W |g|^2 e^{-u}. \end{cases}$$

On note la distance entre x et P par $dist(x,P)$ et écrit $P \| P_0$ lorsque P et P_0 sont parallèles. Le plus important point pour la preuve est le lemme suivant.

Lemme 7.1.2. *Soit $f \in \mathcal{O}(U)$. Le germe f_x de f est inclus dans J si et seulement si pour tout voisinage assez petit $V \subset U$ de x et toute l'hyperplan $P_0 \subset \mathbb{C}^m$*

$$\liminf dist(x,P)\|f|_{V\cap P}\| = 0, comme\ P\|P_0\ et\ dist(x,P) \to 0.$$

Pour démontrer ce lemme, il a besoin de quelque propositions.

Lemme 7.1.3 ([Dem12a], Lemme 11.20)**.** *Soit $f.g_1.\cdots, g_r \in \mathcal{O}_n$ germes de fonctions holomorphes qui s'annulent en 0. Alors on a $|f| \leq C|g|$ pour certaine constante C si et seulement si pour chaque germe de courbe analytique γ passant 0 il existe une constante C_γ telle que $f \circ \gamma \leq C_\gamma |g \circ \gamma|$.*

Démonstration. Si l'inégalité $|f| \leq C|g|$ n'est pas vraie au voisinage de 0, le germe de l'ensemble analytique $(A,0) \subset (\mathbb{C}^{n+r}, 0)$ défini par

$$g_j(z) - f(z)z_{n+j} = 0, \quad 1 \leq j \leq r,$$

contient une suite de points $(z_\nu, g_j(z_\nu)/f(z_\nu))$ convergeant vers 0 quand ν tend vers $+\infty$, avec $f(z_\nu) \neq 0$. Donc $(A,0)$ contient une composant irréductible sur laquelle $f \not\equiv= 0$ et li y a un germe de courbe $\widetilde{\gamma} = (\gamma, \gamma_{n+j}) : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^{n+r}, 0)$ contenu dans $(A,0)$ tel que $f \circ \gamma \not\equiv 0$. On obtient $g_j \circ \gamma = (f \circ \gamma)\gamma_{n+j}$, donc

$$|g \circ \gamma(t)| \leq C|t||f \circ \gamma(t)|$$

et l'inégalité $|f \circ \gamma| \leq C_\gamma |g \circ \gamma|$ n'est pas vraie. □

Proposition 7.1.4. *Soient $k \in \mathbb{N}$, F une fonction holomorphe sur un voisinage de $\overline{\Delta}$, qui n'annule pas sur $\overline{\Delta} \setminus \{0\}$. Supposons que $G \in \mathcal{O}(\Delta)$, $G = o(F)$ en 0, et il existe $t \in \Delta \setminus \{0\}$*

$$F(\omega t) = G(\omega t) \textit{ pour toute la racine } k\textit{-ième de l'unité } \omega.$$

Alors,

$$\sup_\Delta |G| \geq C_1 |t|^{-k}, \quad C_1 = \min_{|s|=1} |F(s)| > 0. \tag{7.1}$$

Démonstration. On peut écrire $F(s) = s^p F_1(s)$, où $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ et F_1 n'annule pas sur $\overline{\Delta}$. En divisant F et G par F_1, on peut supposer que $F(s) = s^p$. On considère la fonction

$$G_1(s) = \frac{1}{k}\sum_\omega \omega^{-p} G(\omega s),$$

où la somme est étendu à tous les racines k-ième de l'unité. On suppose que le série de Taylor de G en 0 s'écrit sous la forme comme suite.

$$G(s) = \sum_{q=0}^{\infty} a_q s^q.$$

Alors,

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{1}{k}\sum_{\omega} \omega^{-p} G(\omega s) \\ &= \frac{1}{k}\sum_{\omega} \omega^{-p} (\sum_{q=0}^{\infty} a_q \omega^q s^q) \\ &= \frac{1}{k}\sum_{q=0}^{\infty} a_q (\sum_{\omega} \omega^{q-p}) s^q \end{aligned}$$

Comme $G = o(F)$ en 0, on a $q - p > 0$. En plus,

$$\sum_{\omega} \omega^{q-p} = \begin{cases} 0 & k \nmid (q-p) \\ k & k|(q-p) \end{cases}$$

Donc, la série de Taylor de G_1 en 0 compte seulement monômes s^q tels que $q - p > 0$ est divisible par k. En particulier, $q \geq p + k$, et donc $G_1(s)/s^{p+k}$ est holomorphe sur Δ. Donc

$$\sup_{s\in\Delta} |G_1(s)| = \sup_{s\in\Delta} |G_1(s)/s^{p+k}| \geq |G_1(t)/t^{p+k}| = |t|^{-k},$$

Notons que

$$\sup_{s\in\Delta} |G_1(s)| \leq \frac{1}{k}\sum_{\omega} |\omega|^{-p} \sup_{s\in\Delta} |G(\omega s)| = \sup_{s\in\Delta} |G(s)|.$$

Pour le cas général, on suppose que $F(s) = s^p F_1(s)$. D'après la démonstration ci-dessus, on a

$$\sup_{s\in\Delta} |G(s)| / \min_{s\in\Delta} |F_1(s)| \geq \sup_{s\in\Delta} |G(s)/F_1(s)| \geq |t|^{-k}.$$

Alors,

$$[\sup_{s\in\Delta} |G(s)| \geq \min_{s\in\Delta} |F_1(s)||t|^{-k} = \min_{|s|=1} |F_1(s)||t|^{-k} = \min_{|s|=1} |F(s)||t|^{-k}.$$

□

Démonstration de Lemme 7.1.2. On peut toujours supposer que $x = 0$.

D'abord, supposons que $f_o \in J$. On choisit j et un voisinage V de 0 tels que $\int_V |f|^2 e^{-u_j} < \infty$. Pour P_0 fixé, on peut changer les coordonnées telles que P_0 est parallèle à l'hyperplan $\{z \in \mathbb{C}^m : z_1 = 0\}$. Par le théorème de Fubini,

$$\int_{\mathbb{C}} \left(\int_{V\cap\{z_1=\sigma\}} |f|^2 e^{-u_j} \right) d\lambda_2(\sigma) = \int_V |f|^2 e^{-u_j} < \infty.$$

Mais $\int |\sigma|^2 d\lambda_2(\sigma)$ est une intégrale divergente sur tous les voisinages V de 0, donc

$$\liminf_{\sigma\to 0} |\sigma|^2 \int_{V\cap\{z_1=\sigma\}} |f|^2 e^{-u_j} = 0$$

Réciproquement, on va montrer que si $f_0 \notin J$, alors, pour tous les voisinages V de 0, il existe une hyperplan P_0 telle que

$$\liminf dist(s,P)\|f|_{V\cap P}\| > 0, \text{ comme } P\|P_0 \text{ et } dist(x,P)\to 0.$$

Pour V un voisinage fixé de 0, on peut supposer que V est pseudo-convexe et relativement compact dans U. D'après le lemme 7.1.3, il existe une application holomorphe $\alpha : \Delta \to U$ telle que $\alpha(0) = 0$ et $f_0 \circ \alpha \notin \mathcal{O}_{\mathbb{C},0} J \circ \alpha$ [1]. On choisit une hyperplan P_0 passant $0 \in \mathbb{C}^m$ qui ne contient pas $\alpha(\Delta)$. On peut supposer que $P_0 = \{z \in \mathbb{C}^m : z_1 = 0\}$ et $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ est holomorphe sur un voisinage de $\overline{\Delta}$, et $F = f \circ \alpha$ n'annule pas sur $\overline{\Delta} \setminus \{0\}$,

$$\alpha_1(s) = s^k, s \in \Delta,$$

et $\alpha(V) \subset V$. Donc, pour $g \in \mathcal{O}(V)$, il existe constantes C_2, C_2' telles que

$$\max_{\alpha(\overline{\Delta})} |g|^2 \leq D_2' \int_V |g|^2 \leq C_2^2 \int_V |g|^2 e^{-u} \leq D_2^2 \int_V |g|^2 e^{-u_j} \tag{7.2}$$

pour tous les j. Soit $P_\sigma = \{z \in \mathbb{C}^m : z_1 = \sigma\}$. On prend un $\sigma \in \Delta \setminus \{0\}$. Supposons que $\|f|_{V\cap P_\sigma}\| < \infty$. Par le théorème de Ohsawa-Takegoshi **??**, pour chaque j, on peut trouver une fonction $g_{j,\sigma} \in \mathcal{O}(V)$ qui coïncide avec f sur $V \cap P_\sigma$ et

$$\int_V |g_{j,\sigma}|^2 e^{-u_j} \leq C_3'^2 \int_{V\cap P_\sigma} |f|^2 e^{-u_j}$$

Ici on peut supposer que C_3' est indépendante à σ et j [2]. En plus, il existe j [3] tel que

$$\int_{V\cap P_\sigma} |f|^2 e^{-u_j} \leq 2\|f|_{V\cap P_\sigma}\|^2.$$

Alors, il existe une constante C_3^2, pour $\sigma \in \Delta \setminus \{0\}$, on peut toujours trouver un j_σ tel que

$$\int_V |g_{j_\sigma,\sigma}|^2 e^{-u_{j_\sigma}} \leq C_3^2 \|f|_{V\cap P_\sigma}\|^2. \tag{7.3}$$

On pose que $G_\sigma = g_{j_\sigma,\sigma} \circ \alpha$ dont le germe en $0 \in \mathbb{C}$ est dans $J \circ \alpha$. Comme $g_{j_\sigma,\sigma} = o(f)$ en 0, on a $G_\sigma = o(F)$ en $0 \in \mathbb{C}$. En plus, $F(\sqrt[k]{\sigma}) = G(\sqrt[k]{\sigma})$ car $\alpha_1(s) = s^k$. D'après la proposition 7.1.4, on a

$$\max_{\alpha(\overline{\Delta})} |g_{j_\sigma,\sigma}| = \max_{\overline{\Delta}} |G_\sigma| \geq \frac{C_1}{|\sigma|} \tag{7.4}$$

1. Notons que J est intégralement clos : si ϕ est entier sur J, $\phi^p + g_1\phi^{p-1} + \cdots + g_{p-1}\phi + g_p = 0$, alors $\phi = O(|g_1| + \cdots + |g_p|)$ en 0, donc $\phi \in J$ par la définition de J.

2. On peut prendre que $C_3'^2 = \sup_{x\in V} e^{(n-1)B(x)}$. Comme B est continue et bornée sur V, $C_3'^2$ est fini.

3. Ici on doit supposer que $\|f|_{V\cap P_\sigma}\| > 0$. Ça c'est vrai pour σ non nul, parce que f n'annule pas sur $\alpha(\Delta) \setminus \{0\}$.

Par 7.2 , 7.3 et 7.4 , on a

$$\|f|_{V\cap P_\sigma}\| \geq \frac{C_1}{C_2C_3|\sigma|}.$$

Ici on supposer que $\|f|_{V\cap P_\sigma}\| < \infty$, mais l'inéquation ci-dessus est aussi vrai quand $\|f|_{V\cap P_\sigma}\|$ est infinie. Donc

$$\liminf dist(s,P)\|f|_{V\cap P}\| > 0, \text{ comme } P\|P_0 \text{ et } dist(x,P)\to 0.$$

On complète la démonstration. □

Maintenant, on peut montrer le théorème 7.1.1 par le lemme ci-dessus.

Démonstration du Théorème 7.1.1. Comme $I(u) = \mathcal{I}(u,x) \supset J$, il faut démontrer que $I(u)$ est inclus dans J.On prend un élément $f_x \in I(u)$, et on veut montrer $f_x \in J$. On va le montrer par récurrence.

L'énoncé est vrai pour $m = 0$. On suppose qu'il est vrai pour $m-1$ et f_x est un germe d'une fonction $f \in \mathcal{O}(U)$. On applique le lemme 7.1.2 en remplaçant u_j par u. Alors, il existe un voisinage V_0 de x dans U, et pour chaque hyperplan $P_0 \subset \mathbb{C}^m$, on a une suite d'hyperplans $P_\nu\|P_0$ telle que $dist(x,P_\nu)\to 0$ et

$$\lim_{\nu\to\infty} dist(x,P_\nu)^2\int_{V_0\cap P_\nu}|f|^2e^{-u} = 0.$$

Soit V un voisinage de x, relativement compact dans V_0. Il existe ν_0 tel que $\int_{V_0\cap P_\nu}|f|^2e^{-u} < -\infty$ pour $\nu > \nu_0$. Par l'hypothèse, on peut trouver un $j = j_\nu$ [4] tel que

$$\int_{V\cap P_\nu}|f|^2e^{-u_j} < \infty.$$

Donc $\|f|_{V\cap P\nu}\|^2 = \int_{V\cap P_\nu}|f|^2e^{-u}$, alors

$$\lim_\nu dist(x,P_\nu)\|f|_{V_0\cap P_\nu}\| = 0.$$

Encore d'après le lemme 7.1.2, $f_x \in J$. □

7.2 Conjecture d'ouverture forte pour métrique hermitienne singulière

Soit $E\to U$ un fibré holomorphe de Hilbert. Soit $f : E\to[0,\infty]$ une fonction Borel-mesurable sur E. On considère l'ensemble

$$E(h,x) = \{f_x : f\in\Gamma(V,E), \int_V h(f) < \infty, V\subset U \text{ } ouvert, \text{ } x\in V\},$$

4. Comme $\int_{V_0\cap P_\nu}|f|^2e^{-u} < \infty$, on a $f_y \in I(u,y)$ pour tout le point $y \in V_o\cap P_\nu$. Alors, pour chaque point y, on peut trouver un voisinage V_y et j_y tel que $\int_{V_y\cap P_\nu}|f|^2e^{j} < \infty$ pour $j \geq j_y$. Maintenant, puisque V est relativement compact dans P_ν, on peut trouver un $j = j_\nu$ tel que $\int_{V\cap P_\nu}|f|^2e^{-u_j} < \infty$.

où f_x est le germe de f en x. Si $\sqrt{h}$ est sous-additive en chaque fibre de E et homogène au sens que $\sqrt{h(\lambda e)} = |\lambda|\sqrt{h(e)}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $e \in E$, $E(h, x)$ est un $\mathcal{O}_x$-module. $\mathcal{E}(h)$ désigne le sous-faisceau de $\mathcal{O}_U(E)$ formé des germes $E(h, x)$. Évidemment, $\mathcal{E}(h)$ est un $\mathcal{O}_U(E)$-module.

Si $P \subset \mathbb{C}^m$ est une hyperplan complexe, $W \subset P \cap U$ est relativement ouvert, et g une section mesurable de $E|_W \to W$, on définit $\|g\| \in [0, \infty]$ par

$$\|g\|^2 = \inf_j \int_W h_j(g),$$

Alors

$$\|g\|^2 = \begin{cases} \infty & \textit{ou} \\ \lim_j \int_W h_j(g) = \int_W h(g). \end{cases}$$

On pose $M = M_x = \cup_j E(h_j, x)$.

Théorème 7.2.1 (Guan-Zhou-Lempert [GZ14] [Lem14]). *Soient $E \to U$ un fibré holomorphe de Hilbert, $h_1 \geq h_2 \geq \cdots$ métriques hermitiennes sur E dont les courbures de Nakano dominent 0. Supposons que $h = \lim_j h_j$ est bornée inférieurement par une métrique hermitienne continue. Si $rk(E) < \infty$, ou $\cup_j \mathcal{E}(h_j)$ est localement finiment engendré, alors $\cup_j \mathcal{E}(h_j) = \mathcal{E}(h)$.*

D'abord, on montre une proposition simple.

Proposition 7.2.2. *Soient W un espace vectoriel complexe, $(B, \| \ \|)$ un espace normé, $L : W \to B$ et $l : W \to \mathbb{C}$ linéaires. Si $|l(w)| \leq C\|L(w)\|$ pour chaque $w \in W$ avec une constante C, alors il y a une application linéaire $a : B \to \mathbb{C}$ telle que $\|a\| \leq C$ et $l = a \circ L$.*

Démonstration. D'abord, on définit a sur $L(W) \subset B$. Si $u = L(w) \in L(W)$, on pose $a(u) = l(w)$. Ça c'est bien définie car $Ker(L) \subset Ker(l)$. En plus,

$$|a(u)| = |l(w)| \leq C\|L(w)\| = C\|u\|.$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe un prolongement de a sur B de même norme, noté aussi par a. $\square$

Comme le cas de fonctions psh, on va montrer le lemme suivant pour M.

Lemme 7.2.3. *Soit M un $\mathcal{O}_x$-module de type fini. Le germe f_x de $f \in \Gamma(E)$ est dans M si et seulement si pour chaque voisinage assez petit $V \subset U$ de x et chaque hyperplan $P_0 \subset \mathbb{C}^m$,*

$$\liminf dist(x, P)\|f|_{V \cap P}\| = 0, \ \textit{as } P \| P_0 \ \textit{ et } dist(x, P) \to 0. \tag{7.5}$$

Avant de donner la démonstration de ce lemme, nous allons énoncer une autre proposition que nous aurons à utiliser.

Proposition 7.2.4 (Lempert 2010). *Soient P, Q espaces de Banach. Soient $f : \Omega \to Hom(P, Q)$ holomorphe, et $\xi \in \Omega$.*

1) *Si $dim(P) < \infty$, alors il existe un sous-espace $Q' \subset Q$ de dimension fini, un ouvert $U \ni \xi$, et une application holomorphe $q : U \to GL(Q)$ telle que $Im\ q(z)f(z) \subset Q'$ pour tous les points $z \in U$.*
2) *Si $dim(Q) < \infty$, alors, il existe un sous-espace $P' \subset P$ de codimension fini, un ouvert $U \ni \xi$, et une application holomorphe $p : U \to GL(P)$ telles que $P' \subset Ker f(z)p(z)$ pour tous les points $z \in U$.*

Démonstration du lemme 7.2.3. On suppose $x = 0$.

La partie de "seulement si" vient du théorème de Fubini comme la preuve du lemme 7.1.2.

Réciproquement, on va montrer que si $f_0 \notin M$, alors pour chaque voisinage $V \subset U$ de 0, il existe une hyperplan P_0 telle que

$$\liminf dist(x, P)\|f|_{V\cap P}\| > 0,\ as\ P\|P_0\ et\ dist(x, P) \to 0. \tag{7.6}$$

On fixe V et suppose qu'il est pseudo-convexe et relativement compact dans U. Soient $g^1, \cdots, g^p \in \Gamma(V, E)$ dont les germes engendrent M. On peut aussi supposer que $\int_V h_{j_0}(g^i) < \infty$ pour un j_0 et $i = 1, \cdots, p$.

Écrivons $\pi : E^* \to U$ l'application canonique. Si $\Delta \subset \mathbb{C}$ est le disque unité et $\alpha : \Delta \to E^*|_V$ est holomorphe en reliant 0 au vecteur nul dans E_0^*, on peut définir une application α^* qui associe à $g \in \Gamma(V, E)$ la fonction $\alpha^* g \in \mathcal{O}(\Delta)$ comme suit :

$$(\alpha^* g)(x) = \alpha(s)g(\pi\alpha(s)).$$

Donc on peut définir les pull-back des germes g_0 des sections de E comme $\alpha^* g_0 \in \mathcal{O}_{\mathbb{C},0}$. Posons $\alpha^* M = \{\alpha^* g_0 : g_0 \in M\}$. On va montrer qu'il existe une application holomorphe α telle que

$$\alpha^* f_0 \notin \mathcal{O}_{\mathbb{C},0}\alpha^* M.$$

D'après la proposition 7.2.4, sur un voisinage de 0, les sections $f, g^1, \cdots, g^p$ sont sections de un sous-fibré holomorphe de dimension finie de E. Alors, on peut supposer que E est de dimension finie lui-même et trivial, $E = U \times \mathbb{C}^n \to U$. Pour une section $g \in \Gamma(V, E)$ qui s'écrit comme $g(z) = (z, g_1(z), \cdots, g_n(z))$, on définit une autre fonction $\widehat{g} \in \mathcal{O}(V \times \mathbb{C}^n)$ vis-à-vis d'elle.

$$\widehat{g}(z, w) = \sum_\nu g_\nu(z) w_\nu.$$

Considérons la clôture intégrale $\widehat{M} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{m+n},0}$ de l'idéal engendré par $\widehat{g}_0^1, \cdots, \widehat{g}_0^p$. Encore d'après la proposition **??**, le germe $\varphi_0 \in \widehat{M}$ vérifie

$$|\varphi|^2 \leq C^2(|\widehat{g}^1|^2 + \cdots + |\widehat{g}^p|^2) \tag{7.7}$$

au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^{m+n}$ pour une constante C.

Nous supposons que $\varphi = \widehat{g}$ vérifie 7.7 au voisinage de 0. En plus, ce voisinage peut être pris de la forme $\pi^{-1}(V_0)$ avec $V_0 \subset V$ un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^m$. Maintenant nous fixons un point $z \in V_0$. Soient

$L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ une application définie comme $L = (\widehat{g}^i(z,\cdot), \cdots \widehat{g}^p(z,\cdot))$, $l = \widehat{g}(z,\cdot) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. D'après la proposition 7.2.2, il existe $a_i \in \mathbb{C}$ tel que

$$\sum_\nu g_\nu(z)w_\nu = \widehat{g}(z,w) = l(w) = \sum_i a_i\widehat{g}^i(z,w) = \sum_\nu\sum_i a_i\widehat{g}^i_\nu(z)w_\nu$$

Donc $g_\nu(z) = \sum_i \widehat{g}^i_\nu(z)$, alors $g(z) = \sum_i g^i(z)$ et $\sum_i |a_i|^2 \leq C^2$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$h_{j_0}(g(z)) \leq \sum_i |a_i|^2 \sum_i h_{j_0}(g^i(z)) \leq C^2 \sum_i h_{j_0}(g^i(z)).$$

Alors, si φ de la forme $\widehat{g}$ est dans $\widehat{M}$, on a $g_0 \in M$. Mais comme $f_0 \notin M$, $\varphi = \widehat{f}$ n'appartient pas à $\widehat{M}$. D'après la proposition **??**, il existe une application holomorphe $\alpha : \Delta \to V \times \mathbb{C}^n$, $\alpha(0) = 0$, telle que $\widehat{f_0} \circ \alpha \notin \mathcal{O}_{\mathbb{C},0}\widehat{M} \circ \alpha$. Alors, α vu comme une application $\Delta \to E^*|_V = V \times \mathbb{C}^n$ vérifie $\alpha^* f_0 \notin \mathcal{O}_{\mathbb{C},0}\alpha^* M$.

Nous pouvons supposer que α vérifie $\pi \circ \alpha \not\equiv 0$ à un terme qui est négligeable devant $\widehat{f} \circ \alpha$ près.

Maintenant, nous choisissons une hyperplan P_0 passant $0 \in \mathbb{C}^m$ qui ne contient pas $\pi\alpha(\Delta)$. Encore, on peut supposer que $P_0 = \{z \in \mathbb{C}^m : z_1 = 0\}$ et α est holomorphe au voisinage de $\overline{\Delta}$ avec $F = \alpha^* f \neq 0$ sur $\overline{\Delta} \setminus \{0\}$. Supposons que la première composant de $\pi\alpha$ est de la forme suivante

$$\pi_1\alpha(s) = s^k,\ s \in \Delta,\ k \geq 1$$

et $\alpha(\overline{\Delta}) \subset V \times \mathbb{C}^n$. Alors, pour chaque $g \in \Gamma(V, E)$, on a

$$\max_{\overline{\Delta}} |\alpha^* g|^2 \leq C_2^2 \int_V h(g) \leq C_2^2 \int_V h_j(g),\ j = 1, 2\cdots$$

où C_2 est une constante qui est indépendante à g.

Soient $\sigma \in \Delta \setminus \{0\}$ et $P_\sigma = \{z \in \mathbb{C}^m : z_1 = \sigma\}$. Soit $\|f|_{V\cap P_\sigma}\| < \infty$. On prend $(X, \omega) = (V, \sum dz_\nu \wedge d\bar{z}_\nu)$, $Y = V \cap P_\sigma$ et $r(z) = c|z_1 - \sigma|^2$. Si on choisit $c > 0$ assez petit, alors $r \leq \frac{1}{2e^2}$ sur V. La forme volume $d\mu_r$ sur $V \cap P_\sigma$ est une multiplicité constante de la volume d'Euclidean. On choisit j_σ tel que

$$\int_{V\cap P_\sigma} h_{j_\sigma}(f) \leq 2\|f|_{V\cap P_\sigma}\|^2$$

Puisque les fibrés $(K \otimes E, h^K_{j_\sigma})$ et (E, h_{j_σ}) sont isométriquement isomorphes, le théorème **??** donne une section $g \in \Gamma(V, E)$ telle que

$$f = g \text{ sur } V \cap P_\sigma \text{ et } \textstyle\int_V h_{j_\sigma}(g) \leq C_3^2\|f|_{V\cap P_\sigma}\|^2,$$

où C_3 est indépendante à σ. Donc $g_0 \in M$ et le germe $G = \alpha^* g$ est dans $\alpha^* M$. Alors $G = o(F)$ en $0 \in \Delta$ et $F(\sqrt[k]{\sigma}) = G(\sqrt[k]{\sigma})$ pour tous les k-racines $\sqrt[k]{\sigma}$. Donc par la proposition 7.1.4, on a

$$\max_{\overline{\Delta}} |\alpha^* g| = \max_{\overline{\Delta}} |G| \geq C_1/|\sigma|.$$

Alors,

$$\|f|_{V\cap P_\sigma}\| \geq \frac{C_1}{C_2C_3|\sigma|}, \sigma \in \Delta \setminus \{0\},$$

Ceci est vrai aussi quand $\|f|_{V\cap P_\sigma}\| = \infty$, donc on montre le lemme. □

Démonstration du théorème 7.2.1. On le montre par récurrence. Le cas $m = 0$ est trivial.

Supposons que l'énoncé est vrai pour $m-1$. Pour appliquer cette hypothèse, nous devons montrer si la restriction de E aux hyperplans $P \subset \mathbb{C}^m$ vérifie les hypothèses du théorème. Si $rk(E) < \infty$, évidemment $rk(E|_P) < \infty$ aussi. Si $\cup_j \mathcal{E}(h_j)$ est localement finiment engendré, on voudrais savoir si le faisceau $\mathcal{F} \to P$ dont le germe en $x \in P$ est

$$\{\varphi_x : \varphi \in \Gamma(V \cap P, E), \textstyle\int_{V\cap P} h_j(\varphi) < \infty \text{ pour certain } j \text{ et ouvert } V \subset U,\ x \in V\}$$

est localement finiment engendré. La réponse est oui presque. Nous supposons qu'il y a $g^1, \cdots, g^p \in \Gamma(E)$ qui engendrent chaque germe de $\cup_j \mathcal{E}(h_j)$. On va montrer que si P vérifie la condition suivante pour certain j,

$$\int_{V\cap P} h_j(g^i) < \infty, i = 1, \cdots, p,$$

le faisceau est engendré par $g^i|_P$. Exactement, soit $\varphi_x \in \mathcal{F}_x$ le germe d'une section $\varphi \in \Gamma(V \cap P, E)$ telle que

$$\int_{V\cap P} h_j(\varphi) < \infty$$

pour certain j et ouvert $V \subset U$, $x \in V$. Puisque V est pseudoconvexe, par le théorème **??**, on peut trouver un prolongement $g \in \Gamma(V, E)$ de φ tel que $\int_V h_j(g) < \infty$. Donc $g_x \in \cup_j E(h_j, x) = M_x$. Mais M_x est engendré par g^i, alors $\varphi_x = g_x|_P$ est dans le module engendré par $g^i_x|_P$.

On pose $x = 0$ et on doit démontrer que $M_0 = E(h, 0)$. Comme ci-dessus, on suppose que $g^1, \cdots, g^p \in \Gamma(E)$ engendre chaque germe de $\cup_j \mathcal{E}(h_j)$. On fixe un voisinage relativement compact $V_0 \subset U$ de 0 et une section $f \in \Gamma(V_0, E)$ telle que $\int_{V_0} h(f) < \infty$. Nous devons monter que $f_0 \in M_0$.

Nous prenons un voisinage V de 0, relativement compact dans V_0 et une hyperplan P_0. Encore, on suppose que $P_0 = \{g \in \mathbb{C}^m : z_1 = 0\}$ et $P_s = \{z \in \mathbb{C}^m : z_1 = s\}$ pour $s \in \mathbb{C}$.

Par le théorème de Fubini, il existe un sous-ensemble négligeable S' de $\mathbb{C}$ et certain j_0 tels que

$$\int_{V_o\cap P_s} h(f) < \infty \textit{ et } \int_{V_0\cap P_s} h_{j_0}(g^i) < \infty$$

pour $s \in S = \mathbb{C} \setminus S'$ et $i = 1, \cdots, p$. En plus,

$$\liminf_{S\ni s\to 0} |s|^2 \int_{V_0\cap P_s} h(f) = 0.$$

Par l'hypothèse, pour chaque $s \in S$, il existe certain j tel que $\int_{V\cap P_s} h_j(f) < \infty$, alors

$$\|f|_{V\cap P_s}\|^2 = \int_{V\cap P_s} h(f),$$

Encore d'après le lemme 7.2.3, $f_0 \in M_0$. □

Annexe A

Technique de Bochner

Dan le chapitre trois, on a montré le théorème de Hörmander par la méthode de Siu. Dan cet appendice, on va expliquer une autre preuve en utilisant l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano.

A.1 Identité de Bochner-Kodaira-Nakano

Nous rappelons un peu la théorie de Hodge sur variétés kählériennes compactes. Soit (X, ω) une variété kählérienne. Soient E un fibré en droites holomorphe sur X et $D = D' + \bar{\partial}_E$ la connexion de Chern de E. D'^* et $\bar{\partial}_E^*$ désignent les opérateurs adjointes de D' et $\bar{\partial}_E$ respectivement.

Définition A.1.1. *Soit (X, ω) une variété kählérienne. Alors les Laplaciens complexes sont définies par*

$$\Delta_{\partial_E} := D'D'^* + D'^*D' \text{ et } \Delta_{\bar{\partial}_E} := \bar{\partial}_E\bar{\partial}_E^* + \bar{\partial}_E^*\bar{\partial}_E.$$

Nous posons $\mathcal{H}^{p,q}(X, E)$ l'ensemble de formes $\bar{\partial}_E$-harmoniques, c'est-à-dire que

$$\mathcal{H}^{p,q}(E) := \{\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}(X, E) : \Delta_{\bar{\partial}_E}(\alpha) = 0\}.$$

Théorème A.1.1 (Décomposition de Hodge)**.** *Avec les notations précédentes, si X est compacte, il y a une décomposition orthogonale :*

$$\mathcal{A}^{p,q}(X, E) = \bar{\partial}\mathcal{A}^{p,q-1}(X, E) \oplus \mathcal{H}^{p,q}(X, E) \oplus \bar{\partial}^*\mathcal{A}^{p,q+1}(X, E),$$

et $\mathcal{H}^{p,q}(X, E)$ est de dimension finie.

Corollaire A.1.2. *La projection naturelle $\mathcal{H}^{p,q}(X, E) \to H^{p,q}(X, E)$ est bijective, où $H^{p,q}(X, E)$ est le (p, q)-ième groupe de cohomologie de Dolbeault du fibré en droites E.*

Avant de montrer l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano, nous rappelons des relations commutatives entre opérateurs différentielles sur variétés Kählériennes. Si A, B sont des opérateur différentiels sur l'algèbre $\mathcal{A}(X, \Lambda^\bullet T_X^* \otimes E)$, le crochet de Lie graduée est défini par

$$[A, B] = AB - (-1)^{ab}BA,$$

où a, b sont le degré de A et B respectivement. Si C est un autre endomorphisme de degré c, on a **l'identité de Jacobi** formelle suivante :

$$(-1)^{ca}\left[A,[B,C]\right]+(-1)^{ab}\left[B,[C,A]\right]+(-1)^{bc}\left[C,[A,B]\right]=0.$$

Théorème A.1.3. *Soit (X,ω) une variété Kählérienne. Soient $D=D'+\bar{\partial}_E$ la connexion de Chern d'un fibré en droites holomorphe E et L_ω l'opérateur définie par $L_\omega(u)=\omega\wedge u$ et $\Lambda_\omega=L_\omega^*$ est l'adjoint formel de L_ω. Alors*

$$\left[\bar{\partial}_E^*,L_\omega\right]=iD',\left[D'^*,L_\omega\right]=-i\bar{\partial}_E,\left[\Lambda_\omega,\bar{\partial}_E\right]=-iD'^*,\left[\Lambda_\omega,D'\right]=i\bar{\partial}_E^*.$$

Théorème A.1.4 (Identité de Bochner-Kodaira-Nakano)**.** *Si (X,ω) est kählérienne et E est un fibré en droites holomorphe, alors les Laplaciens complexes vérifient l'identité*

$$\Delta_{\bar{\partial}_E}=\Delta_{\partial_E}+\left[i\Theta_{E,h},\Lambda_\omega\right]$$

où $\Theta_{E,h}$ est la courbure de la connexion de Chern sur E pour la métrique hermitienne h.

Démonstration. Puisque $\bar{\partial}_E^*=-i\left[\Lambda_\omega,D'\right]$, on obtient

$$\Delta_{\bar{\partial}_E}=\left[\bar{\partial}_E,\bar{\partial}_E^*\right]=i\left[\bar{\partial}_E,\left[\Lambda_\omega,D'\right]\right].$$

D'après l'identité de Jacobi, on a

$$\left[\bar{\partial}_E,\left[\Lambda_\omega,D'\right]\right]=\left[\Lambda_\omega,\left[D',\bar{\partial}_E\right]\right]+\left[D',\left[\bar{\partial}_E,\Lambda_\omega\right]\right]=\left[\Lambda_\omega,\Theta_{E,h}\right]+i\left[D',D'^*\right],$$

Notons $\left[D',\bar{\partial}_E\right]=D^2=\Theta_{E,h}$, ce qui conclut. □

A.2 Théorème d'existence

Supposons que X est compacte et que $u\in\mathcal{A}^{p,q}(X,E)$ est une (p,q)-forme arbitraire. On a

$$\langle\Delta_{\partial_E}u,u\rangle=\|D'u\|^2+\|D'^*u\|^2\geq 0$$

et de même pour $\Delta_{\bar{\partial}_F}$, donc on obtient a priori une inégalité

$$\|\bar{\partial}_E u\|^2+\|\bar{\partial}_E^*u\|^2\geq\int_X\langle\left[i\Theta_{E,h},\Lambda_\omega\right]u,u\rangle dV_\omega.$$

On l'appelle **l'inégalité de Bochner-Kodaira-Nakano**. D'après le résultat d'approximation 3.1.12, cette inégalité est varie pour tout $u\in L^2_{p,q}(X,E)$. Pour simplifier, on note

$$A=A^{p,q}_{E,h,\omega}:=\left[i\Theta_{E,h},\Lambda_\omega\right].$$

Maintenant supposons que A est définie positive et que $g\in L^2_{p,q}(X,E)$ est une forme telle que

$$\bar{\partial}_E g=0,$$

et pour presque tout $x \in X$, il existe $\alpha \in [0, +\infty)$ telle que

$$|\langle g(x), u\rangle|^2 \leq \alpha \langle Au, u\rangle$$

pour tout $u \in (\Lambda^{p,q} T_X^* \otimes E)_x$. Si l'opérateur A est inversible, tel α minimal est $|A^{-1/2} g(x)|^2 = \langle Ag(x), g(x)\rangle$.

Ensuite, on donnera une autre preuve du théorème d'existence de Hörmander en utilisant cette inégalité.

Théorème A.2.1. *Soit (X, ω) une variété kählérienne. Ici X n'est pas forcément compacte, mais nous supposons que la distance géodésique δ_ω est complète dans X. Soit E un fibré vectoriel hermitienne de rang r au dessus de X. Supposons que l'opérateur courbure $A := A^{p,q}_{E,h,\omega} := [i\Theta_{E,h}, \Lambda_\omega]$ est définie positive partout sur $\Lambda^{p,q} T_X^* \otimes E$, $q \geq 1$. Alors pour toute forme $g \in L^2(X, \Lambda^{p,q} T_X^* \otimes E)$ vérifiant $\bar{\partial} g = 0$ et $\int_X \langle A^{-1} g, g\rangle dV_\omega < +\infty$, il existe $f \in L^2(X, \Lambda^{p,q-1} T_X^* \otimes E)$ telle que $\bar{\partial} f = g$ et*

$$\int_X |f|^2 dV_\omega \leq \int_X \langle A^{-1} g, g\rangle dV_\omega.$$

Démonstration. Considérons la décomposition orthogonale de l'espace de Hilbert :

$$L^2(X, \Lambda^{p,q} T_X^* \otimes E) = \mathrm{Ker}\bar{\partial} \oplus (\mathrm{Ker}\bar{\partial})^\perp.$$

Soit $v = v_1 + v_2$ la décomposition d'une forme lisse $v \in \mathcal{A}_c^{p,q}(X, E)$ à support compact (v_1, v_2 ne sont pas forcément à support compact). Comme $(\mathrm{Ker}\bar{\partial})^\perp \subset \mathrm{Ker}\bar{\partial}^*$ et $g, v_1 \in \mathrm{Ker}\bar{\partial}$ par hypothèse, on obtient $\bar{\partial}^* v_2 = 0$ et

$$\begin{aligned} |\langle g, v\rangle|^2 = |\langle g, v_1\rangle|^2 &\leq \left(\int_X \langle A^{-1} g, g\rangle^{1/2} \langle A v_1, v_1\rangle^{1/2} dV_\omega\right)^2 \\ &\leq \int_X \langle A^{-1} g, g\rangle dV_\omega \int_X \langle A v_1, v_1\rangle dV_\omega \end{aligned}$$

L'inégalité de Bochner-Kodaira-Nakano a priori implique

$$\int_X \langle A v_1, v_1\rangle dV_\omega \leq \|\bar{\partial} v_1\|^2 + \|\bar{\partial}^* v_1\|^2 = \|\bar{\partial}^* v_1\|^2 = \|\bar{\partial}^* v\|^2.$$

Donc on obtient

$$|\langle g, v\rangle|^2 \leq \left(\int_X \langle A^{-1} g, g\rangle dV_\omega\right) \|\bar{\partial}^* v\|^2$$

pour tout (p, q)-forme $v \in \mathcal{A}_c^{p,q}(X, E)$. Alors il existe une application linéaire bien définie :

$$w = \bar{\partial}^* v \mapsto \langle v, g\rangle, \quad L^2_{p,q-1}(X, E) \supset \bar{\partial}(\mathcal{A}^{p,q}(E)) \to \mathbb{C}$$

sur l'image de $\bar{\partial}^*$. Cette application linéaire est continue pour la norme L^2 et elle a norme $\leq C$ avec

$$C = \left(\int_X \langle A^{-1} g, g\rangle dV_\omega\right)^{1/2}.$$

Par le théorème de Hahn-Banach, il existe $f \in L^2_{p,q-1}(X, E)$ à $\|f\| \leq C$ telle que $\langle v, g\rangle = \langle \bar{\partial}^* v, f\rangle$ pour tout v, donc $\bar{\partial} f = g$ au sens de distributions. L'inégalité $\|f\| \leq C$ implique l'inégalité dans le théorème. $\square$

Le théorème d'existence ci-dessus est aussi vrai pour toute variété kählérienne faiblement pseudoconvexe, par exemple, toute variété compacte et toute variété de Stein. Un fait élémentaire est ce que tout variété kählérienne faiblement pseudoconvexe possède une métrique kählérinne complète : soit $\chi \geq 0$ une fonction exhaustive et posons

$$\omega_\epsilon = \omega + \epsilon i\partial\bar{\partial}\chi^2.$$

Alors ω_ϵ est une métrique complète pour $\epsilon > 0$.

Théorème A.2.2. *Soit* (X, ω) *une variété kählérienne,* $\dim X = n$. *Soit* L *un fibré en droites hermitien muni d'une métrique* $e^{-\phi}$*et soit*

$$\gamma_1(x) \leq \cdots \leq \gamma_n(x)$$

les valeurs propres de $i\Theta_{L,\phi}$ *pour* ω*, c'est-à-dire que si* $(z_1, \cdots, z_n)$ *sont des coordonnées locales en* x_0*, on peut écrire*

$$\omega = i\sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\bar{z}_j \ \text{ et } i\Theta_{L,\phi} = i\sum_{j=1}^{n} \gamma_j dz_j \wedge d\bar{z}_j$$

en x_0*. Supposons que* $i\Theta_{L,\phi}$ *est positive. Alors pour toute* $g \in L^2_{n,q}(X, L)$ *vérifiant* $\bar{\partial} g = 0$ *et* $\int_X (\gamma_1 + \cdots + \gamma_q)^{-1}|g|^2 e^{-\phi} dV_\omega < +\infty$*, il existe* $f \in L^2_{n,q-1}(X, L)$ *telle que*

$$\bar{\partial} f = g, \ \text{ et } \int_X |f|^2 e^{-\phi} dV_\omega \leq \int_X (\gamma_1 + \cdots + \gamma_q)^{-1}|g|^2 e^{-\phi} dV_\omega.$$

En plus, si E est un fibré en droites muni d'une métrique hermitienne singulière à courbure positive au sens de courant, le théorème d'existence ci-dessus est encore vrai dans ce cas. En particulier, il implique le théorème 3.1.11. En effet, si $i\Theta_{L,\phi} \geq c\omega$, on a alors $\gamma_j \geq c$ et on obtient le théorème immédiatement.

Annexe B

Idéaux Multiplicateurs en Géométrie Algébrique

Le but de cette section est de donner une définition de faisceaux d'idéaux géométrie algébrique qui a le mérite d'établir un lien clair entre idéaux multiplicateurs et théorèmes d'annulations. Nous donnerons des théorèmes importants sans preuve, et pour les détails nous nous réfèrerons [Laz04].

Dans tout l'appendice, les variétés seront supposées lisses. On rappelle qu'un diviseur $D = \sum_i a_i D_i$ (avec $a_i \in \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$) et dit à croisements normaux si, localement, le diviseur réduit $\bar{D} = \sum_i D_i$ est donné par l'équation : $z_1 \cdots z_k = 0$. Si $D = \sum_i a_i D_i$ est un $\mathbb{Q}$-diviseur, on notera $\lfloor D \rfloor = \sum_i \lfloor a_i \rfloor D_i$ sa partie entière et $\{D\} = D - \lfloor D \rfloor$ sa partie fractionnaire (où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière d'un réel x).

B.1 Définition et exemples

Dans toute la suite, la terminologie **morphisme birationnel** désignera une application holomorphe qui est de plus biméromorphe (ou en d'autres termes, une modification propre) :

Définition B.1.1. *Une résolution logarithmique (ou log-résolution) de (X, D) (où D est un $\mathbb{Q}$-diviseur sur X supposée lisse) est un morphisme birationnel $f : X \to X$ (avec X' lisse) vérifiant de plus : $f^*D + Ex(f)$ est à croisements normaux.*

Exemple B.1.1. On considère $X = \mathbb{C}^2$ et $D = \{y^2 = x^3\}$ (D est le cusp à l'origine). Pour résoudre la singularité à l'origine, on procède par éclatement successifs : en fait il est facile de vérifier que trois éclatements suffisent pour se ramener au cas d'un diviseur à croisements normaux. Ces trois éclatements donnent naissance à trois diviseurs exceptionnels (notés E_1, E_2 et E_3) et un calcul direct montre que, dans cette résolution, on a :

$$f^*D = 2E_1 + 3E_2 + 6E_3 + D',$$

où D' désigne la transformée stricte de D.

L'existence de telles résolutions est assurée par les théorèmes d'Hironaka, et de plus, on sait que l'on peut les obtenir en procédant par une suite d'écaltements de centre lisse.

Si $f : X' \to X$ est une log-résolution (ou plus généralement un morphisme birationnel), on note $K_{X'/X} = K_{X'} - f^*K_X$; ce diviseur est appelé le diviseur canonique relatif de f. $K_{X'/X}$ est un diviseur effectif sur X' dont l'équation locale est donnée par l'annulation de $\det(df)$.

Proposition B.1.1. *On a l'égalité suivante :*$f_*\mathcal{O}_{X'}(K_{X'/X}) = \mathcal{O}_X$. *De plus, si N désigne un diviseur effectif sur X', $f_*\mathcal{O}_{X'}(K_{X'/X} - N)$ définit naturellement un faisceau d'idéaux sur X.*

Si on reprend l'exemple ci-dessus, on montre facilement (avec les mêmes notations) :

$$K_{X'/X} = E_1 + 2E_2 + 4E_3.$$

Maintenant on va donner une construction algébro-géométrique pour faisceaux d'idéaux. Soit (X, D) une paire avec D un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif sur X.

Définition B.1.2. *Si $f : X' \to X$ est une log-résolution de (X, D), on appelle faisceau d'idéaux multiplicateurs associé à D le faisceau d'idéaux suivant :*

$$\mathcal{I}(X, D) = \mathcal{I}(D) = f_*\mathcal{O}_{X'}(K_{X'/X} - \lfloor f^*D \rfloor).$$

Remarque B.1.1. La notion d'idéal multiplicateur est bien définie, c'est-à-dire que la définition ne dépendent pas du choix de la log-résolution employée.

Il nous reste maintenant à comparer cette définition avec la définition analytique : pour cela, on va tout d'abord attacher une (famille de) fonction psh à un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif donné. Soit donc $D = \sum_i a_i D_i$ avec $a_i \in \mathbb{Q}_*^+$ et U un ouvert de X sur lequel chaque D_i est engendré par une équation notée g_i (avec $g_i \in \mathbb{O}_X(U)$) ; on pose alors :

$$\varphi_D^U = \sum_i a_i \log |g_i|$$

et $e^{2\varphi_D^U}$ n'est autre que le carré du module de l'équation locale définissant D. Comme les a_i sont positifs, φ_D^U est bien psh et on peut donc considérer le faisceau $\mathcal{I}(\varphi_D^U)$ sur U. On vérifie facilement que ce faisceau ne dépend pas du choix des générateurs g_i ; en particulier les faisceau $\mathcal{I}(\varphi_D^U)$ se recollent pour définir un faisceau d'idéaux sur X que l'on note $\mathcal{I}(\varphi_D)$. On a alors le résultat suivant :

Théorème B.1.2. *Les constructions analytiques et algébriques coïncident :*

$$\mathcal{I}(\varphi_D) = \mathcal{I}(D)$$

en particulier le calcul de $\mathcal{I}(D)$ ne dépend pas de la log-résolution employée.

Démonstration. Tout d'abord, on suppose que D est à croisement normaux. On choisit des coordonnées adaptées à D. Soit f holomorphe sur un voisinage V de 0 dans $\mathbb{C}^n$. L'appartenance de f à $\mathcal{I}(\varphi_D)$ s'écrit donc :

$$\int_V \frac{|f(z)|^2}{|z|_1^{2a_1} \cdots |z_k|^{2a_k}} d\mu < +\infty.$$

En développant en série entière et en utilisant l'égalité de Parseval, on se ramène au cas où f est un monôme : $f(z) = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$. On peut alors séparer les variables et on se ramène à étudier l'intégrale en une variable suivante :

$$\int_V' |z|^{2(\alpha - a)} d\lambda$$

où V est un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$ et $d\lambda$ la mesure sur $\mathbb{C}$. Cette intégrale converge si et seulement si $\alpha - a > -1$, ce qui s'écrit encore $\alpha \geq \lfloor a \rfloor$; cela signifie exactement : $f \in \mathcal{O}_X(-\lfloor D \rfloor)$.

Pour le cas général, soit $f : X \to X'$ une log-résolution de D. Comme f^*D est à croisements normaux on peut appliquer le cas précédent et on a alors

$$\mathcal{I}(\varphi_D \circ f) = \mathcal{I}(\varphi_{f^*D}) = \mathcal{O}_{X'}(-\lfloor f^*D \rfloor)$$

d'où :

$$\mathcal{O}_{X'}(K_{X'/X} - \lfloor f^*D \rfloor) = \mathcal{O}_{X'}(K_{X'/X}) \otimes \mathcal{I}(\varphi_D \circ f),$$

en utilisant la proposition 5.2.2, on obtient directement l'égalité souhaitée. □

La définition analytique est parfois assez commode pour faire des calculs explicites ; à titre d'exemple, examinons le cas du cusp à l'origine (i.e. $D = 5/6 \cdot \{y^2 - x^3 = 0\}$). On doit donc étudier des intégralité du type :

$$\int_V \frac{|f(x,y)|^2}{|y^2 - x^3|^{5/3}} d\mu$$

où V est un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^2$. Or, on montre facilement les estimations suivantes :

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{d\lambda(y)}{|y^2 - x^3|^{5/3}} \sim \frac{C}{|x|^2} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{D}} \frac{d\lambda(x)}{|y^2 - x^3|^{5/3}} \sim \frac{C'}{|y|^2}$$

où $\mathbb{D}$ désigne le disque unité de $\mathbb{C}$ et C et C' sont des constantes strictement positives. Ces estimations nous donnent directement les faits suivants : $1 \notin \mathcal{I}(D)$ alors que $x, y \in \mathcal{I}(D)$. On retrouve donc bien :

$$\mathcal{I}(D) = \mathfrak{m}_0.$$

En fait, on peut définir le faisceau d'idéaux pour un idéal général $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_X$. On a aussi une log-résolution pour $\mathfrak{a}$.

Définition B.1.3. *Soit $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_X$. On fixe une log-résolution $\mu : X' \to X$ de $\mathfrak{a}$ telle que $\mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{X'}(-F)$, où $F = \sum_i b_i E_i$, et $K_{X'/X} = \sum a_i E_i$. Pour un nombre rational $c \geq 0$, l'idéal multiplicateurs de $\mathfrak{a}^c$ est*

$$\mathcal{I}(\mathfrak{a}^c) = \mathcal{I}(c \cdot \mathfrak{a}) = \mu_* \mathcal{O}_{X'}(K_{X'/X} - \lfloor c \cdot F \rfloor)$$

Remarque B.1.2. Contrairement au cas où $\mathfrak{a}$ est un idéal associé à un diviseur, on ne peut pas définir $\mathfrak{a}^c$ dans ce cas général.

B.2 Invariants d'idéaux multiplicateurs

Maintenant on soit X une variété affine lisse. Soit D un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif sur X.

4.1. **Le seuil log-canonique.** Le seuil log-canonique (lct en abrégé d'après la terminologie anglaise) de $\mathfrak{a}$ en x est le nombre

$$\mathrm{lct}_x(\mathfrak{a}) = \mathrm{lct}_x(X, \mathfrak{a}) = \inf\{c > 0 : \mathcal{I}(\mathfrak{a}^c)_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\} = \sup\{c > 0 : \mathcal{I}(\mathfrak{a}^c)_x = \mathcal{O}_{X,x}\}.$$

Rappelons la définition d'exposant de singularité complexe et notons que $\mathcal{I}(cD)_x = \mathcal{I}(c\varphi_D)$, donc $\mathcal{I}(cD)_x = \mathcal{O}_{X,x}$ si et seulement si $e^{-2c\varphi_D}$ est intégrable au voisinage de x. Donc

$$\mathrm{lct}_x(D) = c_x(\varphi_D).$$

D'après la proposition 6.2.2, si on fixe une log-résolution $\mu : \widetilde{X} \to X$ avec $\mu^*\mathfrak{a} = \sum b_i E_i$ et $K_{\widetilde{X}/X} = \sum a_i E_i$, on a

$$\mathrm{lct}(X, \mathfrak{a}) := \inf_x \mathrm{lct}_x(\mathfrak{a}) = \min\{\frac{a_i + 1}{b_i}\}.$$

Définition B.2.1. *1) On dira une paire $(X, \mathfrak{a}^c)$ à singularités log-terminales si et seulement si $a_i - cb_i + 1 > 0$ pour tout i.*

2) On dira une paire $(X, \mathfrak{a}^c)$ est à singularité log-canoniques si et seulement si $a_i - cb_i + 1 \geq 0$ pour tout i.

Donc $(X, \mathfrak{a}^c)$ est à singularités log-terminales si et seulement si $\mathcal{I}(\mathfrak{a}^c)$ est trivial, c'est-à-dire que $\mathrm{lct}(X, \mathfrak{a}) \geq 1$.

Exemple B.2.1. Supposons que $\mathfrak{a} \subset \mathbb{C}[z_1, \cdots, z_n]$ est un idéal propre non nul engendré par monômes. Pour $a \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, on écrit $z^a = z_1^{a_1} \cdots z_n^{a_n}$. Le polyèdre de Newton de $\mathfrak{a}$ est

$$P(\mathfrak{a}) = \text{Enveloppe convexe}(\{a \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} : z^a \in \mathfrak{a}\}).$$

Howald a montré que

$$\mathrm{lct}(\mathfrak{a}) = \mathrm{lct}_0(\mathfrak{a}) = \max\{\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0} : (1 : \cdots : 1) \in \lambda \cdot P(\mathfrak{a})\}.$$

Donc, on obtient que $\mathrm{lct}((x^2, y^2)) = 1$ et $\mathrm{lct}((x^2, y^3)) = 5/6$.

Exemple B.2.2. Soit $f = z_1^{a_1} + \cdots + z_n^{a_n} \in \mathbb{C}[z_1, \cdots, z_n]$. Alors

$$\mathrm{lct}_0(f) = \min\{1, \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\}.$$

4.2. **Nombres de saut.** Le seuil log-canonique mesure la trivialité ou non trivialité d'un idéal multiplicateurs. En utilisant la toute structure algébrique de ces idéaux, il est naturel de voir que ce seuil est seulement le premier invariant d'une suite des invariants qui sont dits les nombres de saut.

Lemme B.2.1. *Pour $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_X$, il y a une suite de nombres rationaux croissants et discrètes*

$$0 = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots$$

tels que $\mathfrak{a}^c$ est constant pour $\xi_i \leq c < \xi_{i+1}$ et $\mathcal{I}(\mathfrak{a}^{\xi_i}) \supsetneq \mathcal{I}(\mathfrak{a}^{\xi_i+1})$.

En particulier, si $\mathfrak{a}$ est l'idéal d'un diviseur D, et φ_D est la fonction psh associée à D, le lemme dit qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\mathcal{I}(\varphi_D) = \mathcal{I}((1+\epsilon)\varphi_D)$$

Ce résultat est exactement la conjecture d'ouverture forte pour la fonction psh à singularités analytiques. Donc on peut voir la conjecture d'ouverture forte comme une généralisation de ce résultat pour les fonctions psh générales.

Bibliographie

[Ber09] Bo Berndtsson. Curvature of vector bundles associated to holomorphic fibrations. *Annals of mathematics*, pages 531–560, 2009.

[BL14] Bo Berndtsson and László Lempert. A proof of the ohsawa-takegoshi theorem with sharp estimates. *arXiv preprint arXiv :1407.4946*, 2014.

[Che11] Bo-Yong Chen. A simple proof of the ohsawa-takegoshi extension theorem. *arXiv preprint arXiv :1105.2430*, 2011.

[Dem82] Jean-Pierre Demailly. Estimations l^2 pour l'opérateur $\bar{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au-dessus d'une variété kählérienne complète. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 15(3) :457–511, 1982.

[Dem92] Jean-Pierre Demailly. Regularization of closed positive currents and intersection theory. *J. Alg. Geom*, 1(3) :361–409, 1992.

[Dem12a] Jean-Pierre Demailly. *Analytic methods in algebraic geometry*, volume 1 of *Surveys of Modern Mathematics*. Higher Education Press, 2012.

[Dem12b] Jean-Pierre Demailly. Complex analytic and differential geometry. `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf`, 2012.

[DK01] Jean-Pierre Demailly and János Kollár. Semi-continuity of complex singularity exponents and kähler–einstein metrics on fano orbifolds. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 34(4) :525–556, 2001.

[GZ13] Qi'an Guan and Xiangyu Zhou. Strong openness conjecture for plurisubharmonic functions. *arXiv preprint arXiv :1311.3781*, 2013.

[GZ14] Qi'an Guan and Xiangyu Zhou. Strong openness conjecture and related problems for plurisubharmonic functions. *arXiv preprint arXiv :1401.7158*, 2014.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Science & Business Media, 1977.

[Hör07] Lars Hörmander. *Notions of convexity*, volume 127 of *Modern Birkhäuser Classics*. Springer Science & Business Media, 2007.

[Huy06] Daniel Huybrechts. *Complex geometry : an introduction*. Universitext. Springer Science & Business Media, 2006.

[Laz04] Robert Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry. II, Positivity for Vector Bundles, and Multiplier Ideals*, volume 49 of *Ergebnisse der Mathematik*. Springer-Verlag, 2004.

[Lem14] Laszlo Lempert. Modules of square integrable holomorphic germs. *arXiv preprint arXiv :1404.0407*, 2014.

[LT12] Christine Laurent-Thiébaut. *Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables-Une introduction*. EDP Sciences, 2012.

[Man93] Laurent Manivel. Un théorème de prolongement l 2 de sections holomorphes d'un fibré hermitien. *Mathematische Zeitschrift*, 212(1) :107–122, 1993.

[MM10] Jeffery D McNeal and Mircea Mustata. *Analytic and algebraic geometry : common problems, different methods*, volume 17 of *IAS/PARK CITY Mathematics Series*. American Mathematical Soc., 2010.

[OT87] Takeo Ohsawa and Kensho Takegoshi. On the extension of l2 holomorphic functions. *Mathematische Zeitschrift*, 195 :197–204, 1987.

[Pau07] Mihai Paun. Siu's invariance of plurigenera : a one-tower proof. *Journal of Differential Geometry*, 76(3) :485–493, 2007.

[Siu74] Yum-Tong Siu. Analyticity of sets associated to lelong numbers and the extension of closed positive currents. *Inventiones mathematicae*, 27(1) :53–156, 1974.

[Siu98] Yum-Tong Siu. Invariance of plurigenera. *Inventiones mathematicae*, 134(3) :661–673, 1998.

[Siu02] Yum-Tong Siu. Extension of twisted pluricanonical sections with plurisubharmonic weight and invariance of semipositively twisted plurigenera for manifolds not necessarily of general type. In *Complex geometry*, pages 223–277. Springer, 2002.

[Sko72] Henri Skoda. Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans $\mathbb{C}^n$. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 100 :353–408, 1972.

[Sko77] Henri Skoda. Estimations L^2 pour l'operateur $\bar{\partial}$ et applications arithmetiques. In *Séminaire Pierre Lelong (Analyse) Année 1975/76*, pages 314–323. Springer, 1977.